1) Determinare la lunghezza ed il vettore tangente nel punto corrispondente a $t = 0$ della curva $(e^t \cos t, e^t \sin t)$, $-2\pi \leq t \leq 2\pi$.

Detta $\phi(t)$ la curva

$$\phi'(t) = (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t)) = \sqrt{2}e^t,$$

quindi

$$l(\gamma) = \sqrt{2}\int_{-2\pi}^{2\pi} e^t dt = \sqrt{2}(e^{2\pi} - e^{-2\pi}).$$

Per $t = 0$, $\phi'(0) = (1, 1)$ e quindi la tangente ha equazione parametrica $x = 1+t$, $y = t$, o cartesiana $y = x - 1$.

2) Determinare e classificare gli estremi relativi della funzione $f(x, y) = x^4 + y^4 - xy$.

Per ogni (x, y)

$$\partial_x f(x, y) = 4x^3 - y,$$
$$\partial_y f(x, y) = 4y^3 - x.$$

I punti critici di f sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 4x^3 - y = 0, \\ 4y^3 - x = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^3 = y, \\ x(2^8x^8 - 1) = 0, \end{cases}$$

e sono $(0, 0)$ e $\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right)$. Per ogni (x, y)

$$\partial^2_{x,x} f(x, y) = 12x^2,$$
$$\partial^2_{y,y} f(x, y) = 12y^2,$$
$$\partial^2_{x,y} f(x, y) = -1.$$

Quindi

$$H(f)(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

quindi $(0, 0)$ non è estremante relativo.

$$H(f)(1/2, 1/2) = H(f)(-1/2, -1/2) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

quindi $(-1/2, -1/2)$ e $(-1/2, -1/2)$ sono minimi relativi.

3) Sia $f(x, y) = |x|^2 + y^2 - 2x_1 + 4x_2 - 6y - 11$, con $x \in \mathbb{R}^2$, $y \in \mathbb{R}$. 1) Quante soluzioni g di classe C^∞ in un intorno del punto $x_0 = (1, -2)$ esistono per l' equazione $f(x, g(x)) = 0$? 2) Si verifichi che se $g(x_0) > 0$, allora g ha un massimo relativo stretto in x_0.

1) Osserviamo che $f(x_0, g(x_0)) = 0$ se e solo se

$$g(x_0)^2 - 6g(x_0) - 16 = 0,$$

e questo vale se e solo se $g(x_0) = -2$ oppure $g(x_0) = 8$. Applichiamo quindi il teorema della funzione implicita nei punti: $A = (1, -2, 8)$ e $B = (1, -2, -2)$. In tali punti:

$$\partial_y f(A) = (2y-6)|_{y=8} = 10 \neq 0, \qquad , \partial_y f(B) = (2y-6)|_{y=-2} = -10 \neq 0,$$

e quindi per tale teorema esistono due funzioni g_A e g_B che sono C^∞ in un intorno di x_0 e tali che $f(x, g_{A/B}(x)) = 0$ in tale intorno, e $g_A(x_0) = 8$, $g_B(x_0) = -2$.

2) L'unica soluzione positive in x_0 è g_A. Dobbiamo dimostrare che il gradiente di g_A si annulla in x_0 e la matrice Hessiana é definita negativa. Per verificare che $\nabla g(x_0) = 0$, consideriamo che $f(x, g_A(x)) = 0$ in un intorno di x_0, e quindi derivando

$$0 = \nabla f(x_0, g_A(x_0)) = 2x_0^T + 2g_A(x_0)\nabla g_A(x_0) + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} - 6\nabla g_A(x_0) = 10\nabla g_A(x_0),$$

e quindi $\nabla g_A(x_0) = 0$. Valutiamo ora l'Hessiana. Derivando la formula precedente

$$\begin{aligned} 0 =& \partial^2_{x,x} f(x_0, g_A(x_0)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + (2g_A(x_0) - 6)H_{g_A}(x_0) \\ &+ 2\begin{pmatrix} (\partial_{x_1} g_A(x_0))^2 & \partial_{x_1} g_A(x_0)\partial_{x_2} g_A(x_0) \\ \partial_{x_1} g_A(x_0)\partial_{x_2} g_A(x_0) & \partial_{x_2} g_A(x_0))^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + 10H_{g_A}(x_0), \end{aligned}$$

e quindi

$$H_{g_A}(x_0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix},$$

ed é definita negativa.

4) Discutere convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right).$$

1) Se $x = 0$ la successione diverge puntualmente. Se $x > 0$,

$$f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)\frac{\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}\right)} \to_{n\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

quindi il limite puntuale é

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad x > 0.$$

2) Osserviamo che

$$|f_n(x) - x(x)| = \frac{1}{2n\sqrt{x}\left(\sqrt{x+n} + \sqrt{x}\right)^2},$$

quindi non si puó avere convergenza uniforme su $(0, \infty)$, in quanto

$$\sup_{(0,\infty)} \frac{1}{2n\sqrt{x}\left(\sqrt{x+n} + \sqrt{x}\right)^2} = +\infty.$$

Invece, dato $a > 0$,

$$\sup_{[a,\infty)} \frac{1}{2n\sqrt{x}\left(\sqrt{x+n} + \sqrt{x}\right)^2} = \frac{1}{2n\sqrt{a}\left(\sqrt{a+n} + \sqrt{a}\right)^2} \to_{n\to+\infty} 0,$$

dato che la funzione è monotona decrescente.