Soluzione della prova di Geometria e Algebra del 9 gennaio 2020

1) (a) Il piano passante per A, B e C è $\pi : x+y+z-1=0$ e una sfera passante per tali punti è $\Sigma : x^2+y^2+z^2-1=0$. Pertanto la circonferenza cercata è

$$\mathcal{C} = \Sigma \cap \pi : \begin{cases} x^2+y^2+z^2-1 &= 0 \\ x+y+z-1 &= 0 \end{cases}$$

(b) La sfera Σ ha centro nell'origine e raggio $R=1$. La retta passante per l'origine e perpendicolare al piano π è $r : x-y=x-z=0$. Intersecando π con r si ottiene il centro $C(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ della circonferenza $\mathcal{C}$. Il raggio di $\mathcal{C}$ è dato da $\bar{R} = \sqrt{R^2 - d(C,O)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.
(c) Il piano tangente a Σ in A è $\alpha : x-1=0$, dunque la retta tangente a $\mathcal{C}$ nel punto A è $t_A = \alpha \cap \pi$, ossia $t_A : x-1 = x+y+z-1 = 0$.

2) (a) La conica $\mathcal{C}$ appartiene al fascio

$$\lambda(y-1)(2x-y+2) + \mu(x-y+2)^2 = 0, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad (\lambda, \mu) \neq (0,0).$$

Imponendo il passaggio per il punto P si ricava $\lambda = \mu$, da cui

$$\mathcal{C} : x^2 + 2x - y + 2 = 0.$$

(b) La matrice dell'equazione di $\mathcal{C}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & 2 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det A = -\frac{1}{4} \neq 0$, $\mathcal{C}$ è una conica generale. Si ha poi $D_{33} = 0$, dunque $\mathcal{C}$ è una parabola.
(c) Il punto improprio di $\mathcal{C}$ è $D_\infty(0,1,0)$ e il punto improprio che definisce la direzione ortogonale a D_∞ è $D'(1,0,0)$. L'asse di $\mathcal{C}$ è dunque $a = p_{D'_\infty} : x+1=0$. Il vertice di $\mathcal{C}$ è il punto $V(-1,1)$.

3) (a) Rispetto alla base canonica $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ deve aversi:

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1) - f(\vec{e}_3) &= (3,0,-3) \\ 2f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_2) &= (6,3,0) \\ f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_3) &= (1,4,1) \end{cases}$$

da cui segue

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y,z) = (2x+2y-z, 2x-y+2z, -x+2y+2z)\,.$$

(b) La matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Risulta $\det A = -27 \neq 0$, pertanto f è un isomorfismo.
(c) La matrice A è simmetrica, dunque essa è diagonalizzabile e l'endomorfismo f è semplice.

4) (a) La matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Poiché $AA^T = I = A^T A$, A è ortogonale e f è un'isometria.
(b) Lo spazio dei punti fissi di f è

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\, x-2y+z=0\} = \mathcal{L}((2,1,0),(-1,0,1)),$$

pertanto f è una simmetria.
(c) Risulta

$$U^\perp = \mathcal{L}((1,-2,1))).$$