Soluzione della prova di Geometria e Algebra del 23 gennaio 2020

1) (a) Le rette r ed s non sono né parallele né incidenti, pertanto esse sono sghembe.
(b) Il generico punto di r è della forma $P(t, 1, -t)$ mentre quello di s è della forma $Q(t', -1, -t')$. Imponendo che il vettore $P - Q$ sia ortogonale ad entrambe le rette si ottiene $t = 0$ e $t' = 0$, dunque $P(0, 1, 0)$ e $Q(0, -1, 0)$. La retta di minima distanza è dunque data dalla retta per tali punti, ossia $\hat{r} : x = z = 0$.
(c) Il punto medio tra P e Q è l'origine O. La sfera cercata ha dunque centro in O e raggio $R = d(O, P) = 1$, ossia

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

2) (a) Per ogni $k \in \mathbb{R}$, la matrice dell'equazione di $\mathcal{C}_k$ è

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & k-1 \end{pmatrix}$$

la quale ha rango 3 per ogni $k \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}\}$ e rango 2 per $k = \frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$. Pertanto $\mathcal{C}_k$ è generale per ogni $k \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}\}$ e semplicemente degenere per $k = \frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$. Si ha poi $D_{33} = 4k$ e dunque (per $k \neq \frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$):

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_k \ \text{ellisse} &\Longleftrightarrow k > 0; \\ \mathcal{C}_k \ \text{iperbole} &\Longleftrightarrow k > 0; \\ \mathcal{C}_k \ \text{parabola} &\Longleftrightarrow k = 0. \end{aligned}$$

(b) Il centro di $\mathcal{C}_1 : x^2 + 4y^2 - 4x = 0$ è $C(2, 0)$.
(c) Gli assi di $\mathcal{C}_1$ sono $a_1 : y = 0$ e $a_2 : x - 2 = 0$, mentre i suoi vertici sono $V_1(0, 0)$, $V_2(4, 0)$, $V_3(2, 1)$ e $V_4(2, -1)$.
3) (a) La matrice dell'endomorfismo f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det A = 1$, f è un isomorfismo.
(b) Risulta

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi

$$f^{-1} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad f^{-1}(x, y, z) = (x + y + 2z, y + z, z).$$

(c) L'unico autovalore di f è $\lambda = 1$, di molteplicità algebrica 3 e molteplicità geometrica 1. Pertanto f non è semplice.
4) (a) Considerati due generici vettori $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\vec{y} = (x_1, x_2, x_3)$ di $\mathbb{R}^3$ risulta

$$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}\left(Q(\vec{x} + \vec{y}) - Q(\vec{x}) - Q(\vec{y})\right) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_3.$$

(b) Una base di $\mathbb{R}^3$ coniugata rispetto a φ è costituita dai vettori

$$\vec{v}_1 = (1, 0, 0), \quad \vec{v}_2 = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \vec{v}_3 = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Rispetto a tale base si ottiene la seguente forma canonica rispetto a φ:

$$Q(\vec{x}) = \tilde{x_1}^2 + 2\tilde{x_2}^2.$$

Posti

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= \vec{v}_1, \\ \vec{E}_2 &= \frac{\vec{v}_2}{\sqrt{2}}, \\ \vec{E}_3 &= \vec{v}_3, \end{aligned}$$

si ottiene la forma normale rispetto alla base $\{\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3\}$:

$$Q(\vec{x}) = X_1^2 + X_2^2.$$

(c) La segnatura di Q è $(2, 0)$.