Soluzione della prova di Geometria e Algebra del 7 febbraio 2019

1) (a) Siano $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Per il Principio di Identità dei Polinomi, per ogni $t \in \mathbb{R}$ deve aversi

$$\begin{aligned} ax(t) + by(t) + cz(t) + d = 0 &\Leftrightarrow (-b + c)t^2 + (-2a + 2c)t + c + d = 0 \\ &\Leftrightarrow a = b = c,\ d = -c. \end{aligned}$$

Pertanto $\mathcal{C}$ è una curva piana contenuta nel piano $\pi : x + y + z - 1 = 0$.
(b) Il punto P si ottiene in corrispondenza di $t = 0$. Risulta

$$\dot{x}(t) = -2, \quad \dot{y}(t) = -2t, \quad \dot{z}(t) = 2t + 2$$

e dunque $(\dot{x}(0), \dot{y}(0), \dot{z}(0)) = (-2, 0, 2)$. Pertanto la retta tangente a $\mathcal{C}$ è $r : x + z - 1 = y = 0$.
(c) Un piano parallelo a r e passante per l'origine è $\alpha : x + z = 0$.

2) (a) La conica $\mathcal{C}$ appartiene al fascio

$$\lambda(y - 2)(y - 5) + \mu(x + y - 2)(x - y + 4) = 0, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0).$$

Imponendo il passaggio per P_4 si ricava $\mu = \lambda$, da cui

$$\mathcal{C} : x^2 + 2x - y + 2 = 0.$$

(b) La matrice dell'equazione di $\mathcal{C}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & 2 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det A = -\frac{1}{4} \neq 0$, $\mathcal{C}$ è una conica generale. Si ha poi $D_{33} = 0$, dunque $\mathcal{C}$ è una parabola.
(c) Il punto improprio di $\mathcal{C}$ è $D_\infty(0, 1, 0)$ e il punto improprio che definisce la direzione ortogonale a D_∞ è $D'(1, 0, 0)$. L'asse di $\mathcal{C}$ è dunque $a = p_{D'_\infty} : x + 1 = 0$. Il vertice di $\mathcal{C}$ è il punto $V(-1, 1)$.

3) (a) Per ogni $p(x), q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha

$$\begin{aligned} f(\lambda p(x) + \mu q(x)) &= \lambda p(x) + \mu q(x) - (\lambda p(x) + \mu q(x))' + \frac{x - 1}{2}\big(\lambda p(x) + \mu q(x)\big)'' \\ &= \lambda\big(p(x) - p'(x) + \frac{x - 1}{2} p''(x)\big) + \mu\big(q(x) - q'(x) + \frac{x - 1}{2} q''(x)\big) \\ &= \lambda f(p(x)) + \mu f(q(x)), \end{aligned}$$

pertanto f è lineare.
(b) La matrice di f rispetto alla base $\{1, x, x^2\}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det A = 1 \neq 0$, f è un isomorfismo.
(c) L'unico autovalore di f è $\lambda = 1$, di molteplicità algebrica 3 e molteplicità geometrica 1. Pertanto f non è semplice.

4) (a) Per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ risulta

$$\begin{aligned} &Q(x, y, z) = x^2 - 4xy + 5y^2 - 6xz + 12yz + 10z^2 = (x - 2y - 3z)^2 + y^2 + z^2 \geq 0; \\ &Q(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow \quad (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Pertanto g è un prodotto scalare.
(b) Partendo dalla base canonica di $\in \mathbb{R}^3$ e utilizzando il metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt si perviene alla seguente base ortonornale rispetto a g:

$$\vec{u}_1 = (1, 0, 0), \quad \vec{u}_2 = (2, 1, 0), \quad \vec{u}_3 = (3, 0, 1).$$

(c) Risulta $g(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ e dunque $\widehat{\vec{v}\vec{w}} = \frac{\pi}{2}$.