

C.d.L. in Ingegneria dell'Informazione
Prova di Geometria e Algebra - 9 gennaio 2020
Tempo a disposizione: 3h 30min

1) Geometria Analitica dello Spazio. Sia fissato nello spazio ordinario un sistema di riferimento cartesiano $\mathcal{RC}(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

- (a) Determinare la circonferenza \mathcal{C} passante per i punti $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ e $C(0, 0, 1)$.
- (b) Determinare il centro e il raggio di \mathcal{C} .
- (c) Trovare la retta tangente a \mathcal{C} nel punto A .

2) Coniche. Sia \mathcal{C} la conica tangente alla retta $r: y - 1 = 0$ nel punto $A(-1, 1)$, tangente alla retta $s: 2x - y + 2 = 0$ nel punto $B(0, 2)$ e passante per il punto $P(-2, 2)$.

- (a) Determinare l'equazione di \mathcal{C} .
- (b) Classificare \mathcal{C} dal punto di vista proiettivo ed affine.
- (c) Trovare assi e vertici di \mathcal{C} .

3) Funzioni Lineari. Si consideri l'endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ avente i vettori $\vec{v} = (1, 0, -1)$ e $\vec{w} = (2, 1, 0)$ come autovettori associati all'autovalore 3 e tale che $f(1, 0, 1) = (1, 4, 1)$.

- (a) Trovare l'espressione esplicita di f .
- (b) Stabilire se f è semplice.
- (c) Dire se f è un isomorfismo.

4) Spazi euclidei. Si consideri lo spazio vettoriale \mathbb{R}^3 con la struttura euclidea standard e l'endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito da

$$f(x, y, z) = \left(\frac{2x + 2y - z}{3}, \frac{2x - y + 2z}{3}, \frac{-x + 2y + 2z}{3} \right).$$

- (a) Provare che f è un'isometria.
- (b) Determinare il sottospazio U dei punti fissi di f ed interpretare f geometricamente.
- (c) Determinare U^\perp .

Quesiti di Teoria.

1. Enunciare e dimostrare il Teorema dell'Identità di Grassmann.
2. Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ una matrice invertibile. Provare che $\det A \neq 0$.

N.B.: La prova sarà superata se verrà raggiunta la sufficienza, separatamente, per la parte relativa agli esercizi e per quella relativa alla teoria. Tutti i procedimenti devono essere brevemente giustificati. Costituirà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.