

C.d.L. in Ingegneria dell'Informazione
Prova di Geometria e Algebra - 23 Gennaio 2020
Tempo a disposizione: 3h 30min

1) Geometria Analitica dello Spazio. Fissato nello spazio ordinario un sistema di riferimento cartesiano $\mathcal{RC}(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, siano date le rette $r : x + z = y - 1 = 0$ e $s : x - z = y + 1 = 0$.

- (a) Verificare che le rette r ed s sono sghembe.
- (b) Determinare la retta di minima distanza tra r ed s .
- (c) Scrivere l'equazione della sfera di raggio minimo tangente alle rette r ed s .

2) Coniche. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si consideri la conica

$$\mathcal{C}_k : kx^2 + 4y^2 - 4x + k - 1 = 0.$$

- (a) Per ogni $k \in \mathbb{R}$ si classifichi \mathcal{C}_k dal punto di vista affine e proiettivo.
- (b) Determinare il centro della conica \mathcal{C}_1 .
- (c) Trovare assi e vertici della conica \mathcal{C}_1 .

3) Funzioni Lineari. Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito da

$$f(x, y, z) = (x - y - z, y - z, z).$$

- (a) Dimostrare che f è un isomorfismo.
- (b) Determinare f^{-1} .
- (c) Stabilire se f è semplice.

4) Spazi euclidei. Sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica la cui forma quadratica associata è $Q(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2$.

- (a) Trovare φ .
- (b) Determinare una forma canonica e la forma normale di Q .
- (c) Determinare la segnatura di Q .

Quesiti di Teoria.

1. Siano $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ due matrici simili. Dimostrare che A e B hanno lo stesso determinante.
2. Siano V e W spazi vettoriali su un campo K e sia $f : V \rightarrow W$ una funzione lineare. Dimostrare che

$$f \text{ è iniettiva} \iff \ker f = \{\vec{0}_V\}.$$

N.B.: La prova sarà superata se verrà raggiunta la sufficienza, separatamente, per la parte relativa agli esercizi e per quella relativa alla teoria. Tutti i procedimenti devono essere brevemente giustificati. Costituirà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.