

C.d.L. in Ingegneria dell'Informazione
Prova di Geometria e Algebra - 17 Febbraio 2020
Tempo a disposizione: 3h 30min

1) Geometria Analitica dello Spazio. Fissato nello spazio ordinario un sistema di riferimento cartesiano $\mathcal{RC}(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, si consideri la curva:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = -2t, \\ y = -t^2, \\ z = (t+1)^2. \end{cases}$$

- (a) Verificare che \mathcal{C} è una curva piana e trovare il piano π che la contiene.
- (b) Trovare la retta r tangente a \mathcal{C} nel punto $P(0, 0, 1)$.
- (c) Trovare un piano parallelo a r e passante per l'origine.

2) Coniche. Sia \mathcal{C} la conica passante per i punti $P_1(0, 2)$, $P_2(-2, 2)$, $P_3(-3, 5)$, $P_4(1, 5)$ e $P_5(-1, 1)$.

- (a) Determinare l'equazione di \mathcal{C} .
- (b) Classificare \mathcal{C} dal punto di vista proiettivo e affine.
- (c) Trovare assi e vertici di \mathcal{C} .

3) Funzioni Lineari. Si consideri la funzione

$$f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x], \quad p(x) \mapsto p(x) - p'(x) + \frac{x-1}{2}p''(x).$$

- (a) Dimostrare che la funzione f è lineare.
- (b) Stabilire se f è un isomorfismo.
- (c) Dire se f è semplice.

4) Spazi euclidei. Si consideri la forma bilineare simmetrica $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$g((x, y, z), (x', y', z')) = xx' - 2xy' - 2yx' + 5yy' - 3xz' - 3zx' + 6yz' + 6zy' + 10zz'.$$

- (a) Provare che g è un prodotto scalare.
- (b) Trovare una base di \mathbb{R}^3 ortonormale rispetto a g .
- (c) Determinare l'angolo tra i vettori $\vec{v} = (1, 0, 0)$ e $\vec{w} = (1, -1, 1)$ rispetto a g .

Quesiti di Teoria.

1. Sia V uno spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} e sia $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo. Dimostrare che se λ è un autovalore di f allora λ^2 è un autovalore di f^2 .
2. Sia \mathcal{C} una conica generale. Dimostrare che \mathcal{C} è una circonferenza se e solo se \mathcal{C} passa per i punti ciclici.

N.B.: La prova sarà superata se verrà raggiunta la sufficienza, separatamente, per la parte relativa agli esercizi e per quella relativa alla teoria. Tutti i procedimenti devono essere brevemente giustificati. Costituirà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.