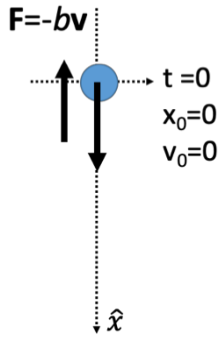
Moto verticale di un grave soggetto a forza di attrito viscoso

(a) velocità moderate, $\mathbf{F} = -b\mathbf{v}$.

È il moto di un punto materiale soggetto ad una forza costante e ad una forza viscosa che, per velocità moderate, è del tipo $\mathbf{F} = -b\mathbf{v}$.

Il coefficiente $b = \chi\eta$ dipende dal coefficiente di viscosità η del mezzo e dal fattore di forma χ del corpo; quest'ultimo, di solito, va determinato sperimentalmente. Per una sfera di raggio R, $\chi = 6\pi R$.



Supponiamo di lasciar cadere una pallina in un fluido viscoso, in modo che all'istante $t = 0$, posizione x_0 e velocità v_0 siano nulle. Considerando il sistema di riferimento in figura la seconda equazione della dinamica si scrive

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} - b\mathbf{v}$$

$$m\frac{dv}{dt} = mg - bv \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m}v$$

separando le variabili

$$\frac{dv}{g - \frac{b}{m}v} = dt \quad \rightarrow \quad \int \frac{dv}{g - \frac{b}{m}v} = \int dt$$

Integrando

$$-\frac{m}{b}\ln\left(g - \frac{b}{m}v\right) = t + C$$

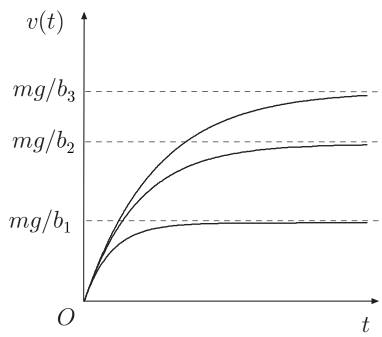
Poiché per t=0 v=0 si ha $-\frac{m}{b}\ln g = C$, pertanto

$$-\frac{m}{b}\ln\left(g - \frac{b}{m}v\right) = t - \frac{m}{b}\ln g \quad \rightarrow \quad \ln\left(g - \frac{b}{m}v\right) - \ln g = -\frac{b}{m}t \quad \rightarrow$$

$$\ln\frac{\left(g - \frac{b}{m}v\right)}{g} = -\frac{b}{m}t \quad \rightarrow \quad \frac{\left(g - \frac{b}{m}v\right)}{g} = e^{-\frac{b}{m}t} \quad \rightarrow \quad \left(g - \frac{b}{m}v\right) = g\,e^{-\frac{b}{m}t} \quad \rightarrow$$

$$v = \frac{gm}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)$$

L'andamento della velocità in funzione del tempo è mostrato in figura per $b_1 > b_2 > b_3$. Essa cresce fino a un valore costante $v_L = mg/b$, che si chiama velocità limite, valore per cui si ha equilibrio dinamico tra la forza di gravità e la forza di attrito viscoso.



Dopo aver determinato v:

$$v = \frac{gm}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)$$

possiamo determinare la legge oraria:

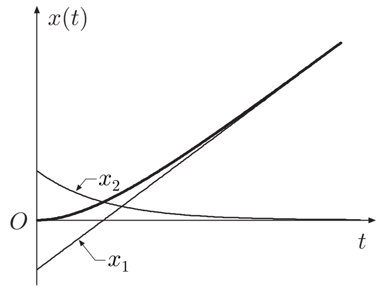
$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{gm}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right) \quad \rightarrow \quad dx = \frac{gm}{b}dt - \frac{gm}{b}e^{-\frac{b}{m}t}\,dt$$

integrando

$$\int dx = \int \frac{gm}{b}dt - \int \frac{gm}{b}e^{-\frac{b}{m}t}\,dt \quad \rightarrow \quad x = \frac{gm}{b}t + \frac{gm^2}{b^2}e^{-\frac{b}{m}t} + C$$

Per t=0, x=0 pertanto $0 = 0 + \frac{gm^2}{b^2} + C \quad \rightarrow \quad C = -\frac{gm^2}{b^2}$ pertanto

$$x = \frac{gm}{b}t + \frac{gm^2}{b^2}e^{-\frac{b}{m}t} - \frac{gm^2}{b^2}$$



si osservi che x è la somma di un termine lineare

$$x_1 = \frac{gm}{b}t - \frac{gm^2}{b^2}$$

E di uno esponenziale

$$x_2 = \frac{gm^2}{b^2}e^{-\frac{b}{m}t}$$

La somma dei due termini dà l'equazione oraria; l termine lineare è rappresentato da una retta, le cui intercette con gli assi sono $-m^2g/b^2$ ed $m/b = \tau$. Il secondo `e un esponenziale decrescente che per t = 0 assume il valore m^2g/b^2. È chiaro che per t sufficientemente grande rispetto a τ l'andamento è solo lineare; il moto, dopo la fase transitoria, è uniforme con velocità mg/b.

(b) velocità elevate, $\mathbf{F} = -\beta\mathbf{v}^2$.

Lo studio è analogo a quello fatto in precedenza, con la differenza che in questo caso $\mathbf{F} = -bv\mathbf{v}$, dove $\beta = \chi\rho l^2$, con χ coefficiente di forma, l una lunghezza caratteristica del grave e ρ densità del mezzo. Come nel caso precedente supponiamo che per t = 0, x_0 e v_0 siano uguali a zero; assunto come riferimento un asse verticale volto verso il basso, la seconda equazione della dinamica diventa:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} - bv\mathbf{v}$$

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \beta v^2 \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = g - \frac{\beta}{m}v^2$$

separando le variabili

$$\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{g}\left(1-\frac{\beta}{\mathrm{mg}}\mathrm{v}^2\right)} = \mathrm{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{\mathrm{dv}}{\left(1-\frac{\mathrm{v}^2}{v_L^2}\right)} = g\mathrm{dt} \quad \rightarrow \quad \int \frac{v_L^2\mathrm{dv}}{(v_L^2-\mathrm{v}^2)} = \int g\mathrm{dt}$$

Avendo posto $v_L^2 = \frac{\mathrm{mg}}{\beta}$

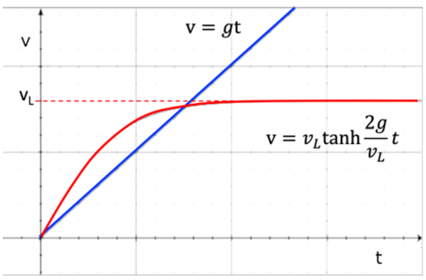
$$\int \frac{v_L^2\mathrm{dv}}{(v_L^2-\mathrm{v}^2)} = \frac{v_L}{2}\int\left[\frac{1}{v_L+\mathrm{v}}+\frac{1}{v_L-\mathrm{v}}\right]\mathrm{dv} = \frac{v_L}{2}\left[\ln(v_L+\mathrm{v})+\ln(v_L-\mathrm{v})\right] \quad \rightarrow$$

$$\frac{v_L}{2}\ln\frac{v_L+\mathrm{v}}{v_L-\mathrm{v}} = gt + C$$

Poiché per t=0 v=0 si ha $C = O$, pertanto:

$$\ln\frac{v_L+\mathrm{v}}{v_L-\mathrm{v}} = \frac{2g}{v_L}t \quad \rightarrow \quad \frac{v_L+\mathrm{v}}{v_L-\mathrm{v}} = e^{\frac{2g}{v_L}t} \quad \rightarrow \quad v_L+\mathrm{v} = (v_L-\mathrm{v})e^{\frac{2g}{v_L}t} \quad \rightarrow$$

$$v_L\left(1-e^{\frac{2g}{v_L}t}\right) = -\mathrm{v}\left(1+e^{\frac{2g}{v_L}t}\right) \quad \rightarrow \quad \mathrm{v} = v_L\frac{e^{\frac{2g}{v_L}t}-1}{e^{\frac{2g}{v_L}t}-1} = v_L\tanh\frac{2g}{v_L}t$$



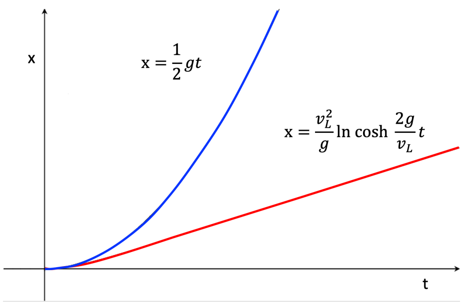
L'equazione ottenuta ($\mathrm{v} = v_L\tanh\frac{2g}{v_L}t$) mostra che, per t → ∞, v→ v_L.

Quindi v_L è la velocità asintotica o limite.

La figura confronta la velocità v (curva rossa), con la velocità in un moto di caduta libera (curva blu)

Integrando l'equazione ottenuta, e ricordando che per t = 0, x_0 = 0, si ottiene l'equazione del moto:

$$\mathrm{v} = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = v_L\tanh\frac{2g}{v_L}t \quad \rightarrow \quad \int \mathrm{dx} = \int v_L\tanh\frac{2g}{v_L}t\,\mathrm{dt} \quad \rightarrow \quad \mathrm{x} = \frac{v_L^2}{g}\ln\cosh\frac{2g}{v_L}t$$



È interessante confrontare la legge oraria appena ottenuta $\mathrm{x} = \frac{v_L^2}{g}\ln\cosh\frac{2g}{v_L}t$ (curva rossa) con la legge di caduta dei gravi nel vuoto $\mathrm{x} = \frac{1}{2}gt$ (curva blu)

Esempio 1

Un paracadutista incontra una forza di resistenza idraulica $F = -\beta v^2$, dove $\beta = 0,8R^2$ con R raggio del paracadute. Si vuole determinare R in modo che il paracadutista col suo equipaggiamento, di massa totale m, raggiunga il suolo con la stessa velocità con cui vi perverrebbe cadendo da una altezza di un metro.

Uguagliando la velocità limite al quadrato $v_L^2 = \frac{\mathrm{mg}}{\beta}$

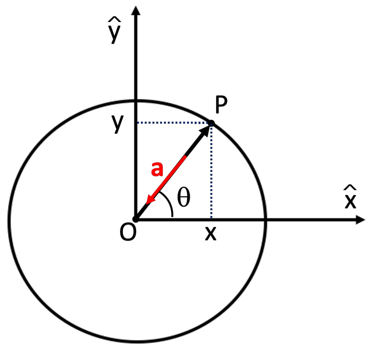
a quella che il paracadutista assumerebbe in caduta libera da un metro $v_c^2 = 2\mathrm{g}$

$$\frac{\mathrm{mg}}{0.8R^2} = 2\mathrm{g} \rightarrow \mathrm{R} = \sqrt{\frac{m}{1.6}}$$

In funzione della massa otteniamo:

m (kg)	R (m)
50.0	5.6
60.0	6.1
70.0	6.6
80.0	7.1
90.0	7.5
100.0	7.9

Moto circolare



Consideriamo un punto che descrive una traiettoria circolare di raggio R, come in figura. Consideriamo un sistema di assi cartesiani x,y con origine O nel centro della circonferenza descritta dal punto P. Il raggio vettore R forma un angolo θ con l'asse x. La relazione $\theta = \theta(t)$ indica la funzione che descrive la variazione di θ con t (oss:la velocità angolare è adimensionale, si misura in rad). La velocità angolare $d\theta/dt$ si indica con ω e si misura in rad/s.
Nel sistema di riferimento cartesiano determiniamo la posizione, la velocità e l'accelerazione del punto P al variare di θ.

$$\begin{aligned} x &= Rcos\theta \\ y &= Rsin\theta \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = -Rsin\theta\,\frac{d\theta}{dt} \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = \quad Rcos\,\frac{d\theta}{dt} \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = -Rcos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - Rsin\theta\frac{d^2\theta}{d^2t} \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = -Rsin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + Rcos\theta\frac{d^2\theta}{d^2t} \end{aligned}$$

Qualunque sia $\theta = \theta(t)$ il moto circolare così descritto la velocità risulta tangente alla traiettoria (come deve essere), infatti **R**=(x,y) e **v**=(v_x,v_y) sono perpendicolari.
Dimostrazione: eseguiamo il prodotto scalare **R · v**

$$(Rcos\theta)\left(-Rsin\theta\,\frac{d\theta}{dt}\right) + (Rsin\theta)\left(Rcos\,\frac{d\theta}{dt}\right) = -R^2\frac{d\theta}{dt}(cos\theta sin\theta - cos\theta sin\theta) = 0$$

Moto circolare uniforme

Se il moto è circolare uniforme (il punto P descrive archi uguali in tempi uguali), l'angolo θ varia linearmente col tempo

$$\theta = \omega t \quad con\ \omega\ \text{velocità angolare,} \qquad \text{in questo caso costante}$$

Allora $\frac{d^2\theta}{d^2t} = 0$ e si ha:

$$\begin{aligned} a_x &= -Rcos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -R\theta_0^2 cos\theta \\ a_y &= -Rsin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -R\theta_0^2 sin\theta \end{aligned}$$

Si deduce che il vettore posizione **R** e l'accelerazione **a** hanno lo stesso verso ma direzione opposta: il vettore **R** punta dal centro O al punto P sulla circonferenza ed il vettore **a** dal punto P al punto O. Diremo che l'accelerazione è "*centripeta*".
Calcoliamo il modulo di **a** ed il modulo di **v**

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{R^2\omega^4 cos^2\theta + R^2\omega^4 sin^2\theta} = R\omega^2$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{R^2\omega^2 sin^2\theta + R^2\omega^2 cos^2\theta} = R\omega$$

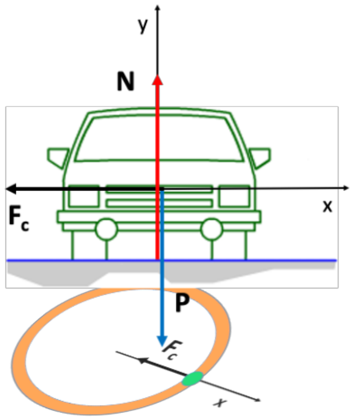
Pertanto, il modulo dell'accelerazione centripeta può anche essere scritto come: $a = \frac{v^2}{R}$

Esempio 2

Una curva di un'autostrada, di raggio R=500 m, viene percorsa alla velocità di v=100 km/h.

a) Ricavare il coefficiente di attrito minimo μ_s affinché l'automobile affronti la curva su strada piana.
b) Determinare l'inclinazione della strada affinché le autovetture che la percorrono possano affrontarla anche in assenza di attrito

Parte (a)
Affinché il corpo percorra un moto circolare questo deve avere una accelerazione centripeta di intensità $a_c = vR$, quindi deve essere soggetto a una forza centripeta di intensità $F_c = m\, a_c$



Lungo la direzione radiale l'unica forza che agisce è la forza di attrito, in quanto la reazione vincolare è diretta perpendicolarmente alla strada, come da figura.

Consideriamo un sistema di riferimento centrato sulla macchina (vedi figura), con asse y diretto lungo N, e asse x avente la stessa direzione di F_c e verso opposto. Dal diagramma di corpo libero abbiamo che le forze agenti sulla macchina sono:

$$\sum F_x = f_a = F_c \rightarrow$$
$$\sum F_y = -P + N = 0$$

Poiché il modulo della forza di attrito è $F_c = mv^2/R$ e $f_a = \mu N = \mu mg$, si avrà:

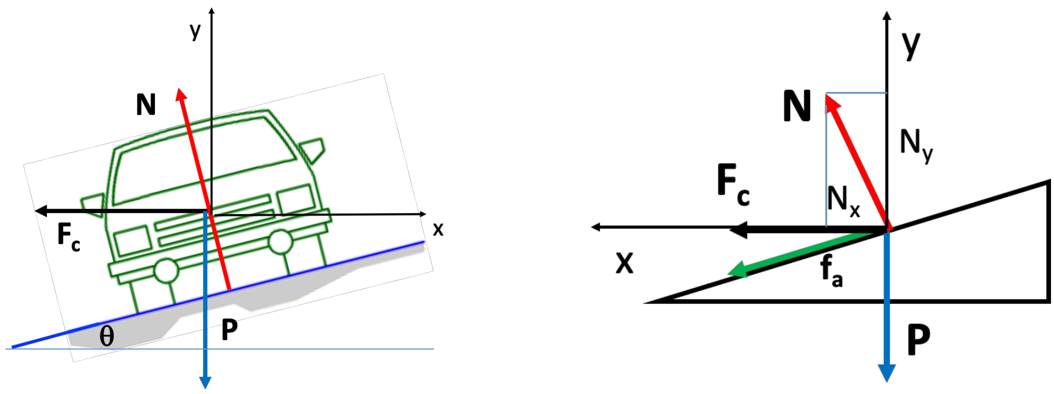
$$\mu mg = \frac{mv^2}{R} \rightarrow \mu = \frac{v^2}{gR} = 0.157$$

Parte (b)

Una macchina percorre una curva sopraelevata che forma un angolo θ con l'orizzontale (figura a). Su di essa agiscono due forze, la reazione vincolare N e la forza peso P.

Il corpo percorra un moto circolare sotto l'azione di una forza centripeta di intensità $F_c=v^2m/R$

Consideriamo un sistema di riferimento (diagramma di corpo libero, figura b) centrato sulla macchina come da figura, con asse y diretto lungo la componente N_y della reazione vincolare, e asse x diretto lungo la componente N_x, parallela al raggio della circonferenza. Dal diagramma di corpo libero abbiamo che le forze agenti sulla macchina sono:



$$\sum F_x = N_x + f_a sin\theta = F_c$$
$$\sum F_y = -P + N_y = 0 \rightarrow N_y = mg$$

$$N_x = N_y tg\theta$$

$$f_a = \mu N = \mu\sqrt{N_y^2(1+tg^2\theta)} = \sqrt{(1+tg^2\theta)}\mu mg$$
$$F_c = \frac{mv^2}{R} = N_x + f_a sin\theta = mgtg\theta + (1+tg^2\theta)\mu mg sin\theta$$

In assenza di attrito μ = 0 e si ha:

$$\frac{mv^2}{R} = N_x = mgtg\theta \rightarrow tg\theta = \frac{v^2}{gR} = \frac{(\frac{100}{3.6})^2}{10\cdot 500} \rightarrow \vartheta = tg^{-1}(0.154) = 8.77°$$