▸ CILINDRO CAVO SOGGETTO A SOLA PRESSIONE INTERNA
($p_e=0$)

Le tensioni diventano:

$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{p_i R_i^2}{R_e^2-R_i^2}\left(1-\dfrac{R_e^2}{r^2}\right) < 0 \text{ sempre}^{(*)} \text{ (ovvero di compressione)} \\ \sigma_\theta = \dfrac{p_i R_i^2}{R_e^2-R_i^2}\left(1+\dfrac{R_e^2}{r^2}\right) > 0 \text{ sempre (ovvero di trazione)} \end{cases}$$

(*) ovviamente se $p_i > 0$! La stessa precisazione vale nel seguito.

La tensione σ_θ, sempre di trazione è massima sulla superficie interna del cilindro, dove vale:

$$\sigma_{\theta max} = \frac{R_i^2+R_e^2}{R_e^2-R_i^2}\,p_i = \frac{p_i \cancel{R_i^2}\overbrace{\left(1+\frac{R_e^2}{R_i^2}\right)}^{>1}}{\cancel{R_i^2}\underbrace{\left(\frac{R_e^2}{R_i^2}-1\right)}_{>1}} > p_i$$

Questa tensione è sempre maggiore della pressione interna p_i, qualunque sia il rapporto tra i raggi interno ed esterno.

I casi limite sono:

▸ $\left(\frac{R_e}{R_i} \to \infty\right)$: $\sigma_{\theta max} = p_i \dfrac{\left(\frac{R_e^2}{R_i^2}+1\right)}{\left(\frac{R_e^2}{R_i^2}-1\right)} \to p_i \dfrac{\cancel{\left(\frac{R_e}{R_i}\right)^2}}{\cancel{\left(\frac{R_e}{R_i}\right)^2}} \to p_i$ (spessore infinito)

▸ $\left(\frac{R_e}{R_i} \to 1\right)$: $\sigma_{\theta max} = \dfrac{2R^2}{(R_e-R_i)(R_e+R_i)}\,p_i = \dfrac{\cancel{2}R^{\cancel{2}}}{t\cancel{2R}}\,p_i = p_i \dfrac{R}{t}$

si ritrova quindi la formula di Mariotte che vale per i tubi di spessore sottile dove R è il raggio medio e t lo spessore di parete.

Nel caso di deformazione piana è anche:

$$\sigma_z = \frac{2\nu\, p_i R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} > 0 \quad \text{(ovvero di trazione)}$$

[OSS. Se $R_e \to \infty$, le tensioni diventano:

$$\sigma_r = -\frac{p_i R_i^2}{r^2}$$

$$\sigma_\theta = +\frac{p_i R_i^2}{r^2}$$

$$\sigma_z = 0$$

→ cioè si ha in ogni punto una tensione tang. semplice ed essendo $\sigma_r + \sigma_\theta = 0$ sono nulle sia σ_z che ε_z.
Per r abbastanza grande rispetto a R_i le tensioni sono trascurabili, in armonia con il principio di De St. Venant.]

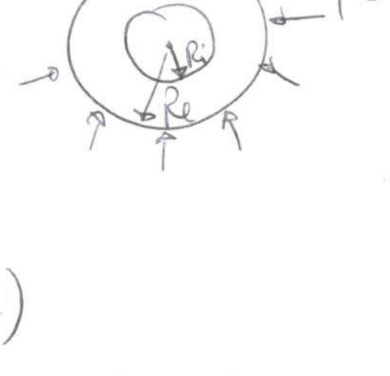
L'espressione dello spostamento è:

$$u_r = \frac{1}{2G}\left[\frac{1}{r} R_i^2 R_e^2 p_i + p_i R_i^2 (1-2\nu) r\right] \cdot \frac{1}{(R_e^2 - R_i^2)} =$$

$$= \frac{p_i R_i^2}{2G(R_e^2 - R_i^2)}\left[\frac{R_e^2}{r} + r(1-2\nu)\right], \quad R_i \le r \le R_e$$

- CILINDRO CAVO SOGGETTO A SOLA PRESSIONE ESTERNA ($p_i = 0$)

Le tensioni diventano:



$$\sigma_r = \frac{-p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2}\left(1 - \frac{R_i^2}{r^2}\right) < 0 \quad \text{(compressione)}$$

$$\sigma_\theta = \frac{-p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2}\left(1 + \frac{R_i^2}{r^2}\right) < 0 \quad \text{(compressione)}$$

quindi entrambe le tensioni sono di compressione, e

$|\sigma_\theta| > |\sigma_r|$.

Il massimo valore di $|\sigma_\theta|$ si ha sulla superficie interna, e vale:

$$|\sigma_{\theta max}| = \frac{2R_e^2}{R_e^2-R_i^2}\, p_e$$

Nel caso di deformazione piana, è anche:

$$\sigma_z = -2\nu \frac{p_e R_e^2}{R_e^2-R_i^2} < 0 \quad \text{(compressione)}$$

[Oss. Se $R_i \to 0$, le tensioni diventano:

$$\begin{cases} \sigma_r = \sigma_\theta = -p_e \\ \sigma_z = -2\nu p_e \end{cases}$$

in accordo col caso della lastra circolare a meno del segno dovuto al fatto che qui p_e è entrante.

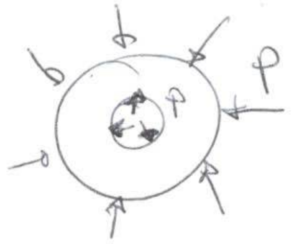
Se $R_e \to \infty$, e anche se $R_i \to 0$, $|\sigma_{\theta max}| \to 2p_e$. Nel caso $R_i \to 0$ comunque il "bordo interno" diventa inesistente e quindi $|\sigma_{\theta max}|$ perde significato, mentre come appena visto $\sigma_\theta = -p_e$ ovunque]

L'espressione dello spostamento è

$$u_r = \left[-p_e R_i^2 R_e^2 - p_e R_e^2 (1-2\nu) r^2\right] \cdot \frac{1}{2G r (R_e^2 - R_i^2)} =$$

$$= \frac{-p_e R_e^2}{2G(R_e^2-R_i^2)} \left[\frac{R_i^2}{r} + (1-2\nu) r\right], \quad R_i \le r \le R_e$$

▷ CILINDRO CAVO CON PRESSIONE ESTERNA = PRESSIONE INTERNA ($p_i = p_e = p$)



Le tensioni diventano:

$$\begin{cases} \sigma_r = \sigma_\theta = -p \\ \sigma_z = -2\nu p \quad \text{(se deformaz. piana)} \end{cases}$$

ovvero si hanno tensioni uniformi

Lo spostamento è:

$$u_r = -\frac{p(1-2\nu)}{2G} r \quad , R_i \le r \le R_e$$

È come se il foro non ci fosse proprio. (Confrontare con il paragrafo 4.6.2). D'altra parte potremmo pensare la lastra anulare soggetta a questa condizione di carico come "estratta" dalla lastra circolare piena soggetta a pressione sul bordo esterno.