Capitolo 7

Meccanica dei liquidi

Lo studio della meccanica di un liquido, costituito da un numero enorme di punti materiali, gli atomi del liquido, deve rinunciare ad utilizzare il modello della meccanica newtoniana in termini di velocità, accelerazioni e forze agenti per ciascuno di essi; si affida quindi ad una descrizione in termini di grandezze macroscopiche che risultino dal comportamento *medio* degli atomi del liquido in questione.

7.1 Statica dei liquidi

7.1.1 Pressione

Si definisce *densità* di un corpo il rapporto fra la sua massa e il suo volume

$$\rho = \frac{m}{V} \ .$$

Un corpo è detto *omogeneo* se ogni sua parte ha la stessa densità. Se non lo la densità viene definita la densità puntuale considerando la densità di un volume piccolo al tendere a zero del volume in questione.
Si definisce *peso specifico* di un corpo il rapporto fra il modulo della sua forza peso e il volume:

$$P_s = \frac{mg}{V} = \rho g \ .$$

Un liquido si dice *incomprimibile* se la sua densità è costante; cioè se il suo volume non varia qualsiasi sia la forza agente su di esso. I liquidi reali sono, con ottima approssimazione incomprimibili; qui si suppone che siano perfettamente incomprimibili.
Si definisce *pressione* esercitata da una forza $\boldsymbol{F}$ su una superficie il rapporto fra il modulo $F_\perp$ della componente di $\boldsymbol{F}$ perpendicolare alla superficie e l'area S della superficie:

$$p = \frac{F_\perp}{S} \ .$$

La pressione in un punto viene definita al tendere a zero della superficie. L'unità di misura della pressione è il *pascal*, simbolo Pa.
Se un liquido è in equilibrio la sua pressione ha le seguenti proprietà.
La forza esercitata dalla pressione del liquido su ciascuna delle pareti del recipiente che lo contiene è sempre perpendicolare alla parete in questione.
In ogni punto di un liquido la pressione è indipendente dall'orientazione della superficie rispetto alla quale la pressione viene calcolata.
La pressione esercitata dall'atmosfera terrestre dipende dalla latitudine, dalla temperatura dell'aria e dalla quota sul livello del mare; il valore *normale* o *standard* della pressione atmosferica è

$$p_0 = 101325\,\mathrm{Pa} = 1\,\mathrm{atm} = 1013.25\,\mathrm{mbar} \ .$$

PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Un recipiente cubico contiene un litro di spigolo $\ell = 10.0\,\mathrm{cm}$ è riempito di acqua; sapendo che la densità dell'acqua vale $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$; determinare la pressione esercitata dall'acqua sulla base del recipiente.

Soluzione

La pressione è dovuta alla forza peso dell'acqua che preme sulla superficie di base del cubo. Vale quindi

$$p = \frac{mg}{S} \ ;$$

la massa dell'acqua può essere calcolata come il prodotto della densità per il volume:

$$m = \rho V = \rho \ell^3 = \rho S \ell \ ;$$

per la pressione cercata pertanto si trova

$$p = \frac{\rho S \ell g}{S} = \rho \ell g = 981\,\mathrm{Pa} \ .$$

Problema 2

Determinare la forza esercitata dalla pressione atmosferica normale sulla superficie di una mano, supposta di area $S = 1.0 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m^2}$

Soluzione

Vale evidentemente

$$F = p_0 S = 1.0 \cdot 10^3\,\mathrm{N} \ .$$

7.1.2 Legge di Stevin

Dati due punti P_1 e P_2 che si trovino all'interno di un liquido di densità ρ in equilibrio e sia h la differenza delle loro profondità, con P_2 piú in basso, allora fra le pressioni nei due punti vale la relazione, detta *legge di Stevin*,

$$p_2 - p_1 = \rho g h \ . \tag{7.1}$$

La legge di Stevin ha alcune immediate conseguenze.

1. Due punti che si trovano alla stessa profondità hanno la stessa pressione.
2. Una variazione di pressione in un punto di un liquido si trasmette integralmente in ogni altro punto del liquido (*legge di Pascal*).
3. Se due o piú vasi in comunicazione fra loro sono riempiti dello stesso liquido, le loro superfici libere si trovano alla stessa altezza (*principio dei vasi comunicanti*).

PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Determinare la pressione sul fondo di una piscina piena d'acqua e profonda $h = 10\,\mathrm{m}$.

Soluzione

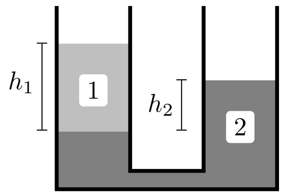
La superficie libera dell'acqua è in equilibrio con l'atmosfera, quindi la pressione dell'acqua è qui uguale alla pressione atmosferica; la pressione cercata è quindi data da (7.1):

$$p = p_0 + \rho g h = 2.0 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \ .$$

Problema 2

Due vasi comunicanti sono riempiti uno con olio di densità $\rho_1 = 850\,\mathrm{kg/m^3}$ e l'altro con acqua di densità $\rho_2 = 1000\,\mathrm{kg/m^2}$; sapendo che i due liquidi non sono mescolabili, e che la superficie libera dell'acqua si trova ad $h_2 = 4.32\,\mathrm{cm}$ dalla superficie di separazione dei due liquidi, determinare l'altezza h_2 della superficie libera dell'olio dalla stessa superficie di separazione.

Soluzione



Con riferimento alla figura, si consideri che le superfici libere dei due liquidi sono entrambe in equilibrio con l'atmosfera e quindi si trovano alla pressione atmosferica p_0; inoltre i due liquidi sono in equilibrio alla loro superficie di separazione e quindi hanno qui la stessa pressione p. Applicando la legge di Stevin (7.1) ad entrambi i liquidi si ottiene pertanto

$$p_0 = p + \rho_1 g h_1 \qquad , \qquad p_0 = p + \rho_2 g h_2 \ ;$$

dal confronto di queste due equazioni si trova

$$\rho_1 g h_1 = p_0 = \rho_2 g h_2 \qquad \longrightarrow \qquad h_1 = \frac{\rho_2}{\rho_1} h_2 = 5.40\,\mathrm{cm} \ .$$

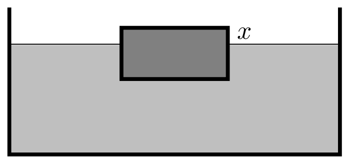
7.1.3 Legge di Archimede

Un corpo immerso in un liquido di densità ρ_l riceve una spinta verso l'alto pari al peso del liquido spostato, cioè al peso di un volume di liquido pari al volume del corpo.

Come conseguenza si ha che un corpo galleggia o affonda a seconda che la sua densità sia rispettivamente minore o maggiore della densità del liquido.

PROBLEMI RISOLTI

***Problema 1**



Un parallelepipedo di densità $\rho = 850\,\mathrm{kg/m^3}$ galleggia in una vasca d'acqua; sapendo che la base S del parallelepipedo è parallela al fondo della vasca e che l'altezza è $h = 40\,\mathrm{cm}$ determinare qual'è la porzione x dell'altezza che emerge dall'acqua.

Soluzione

Poiché il parallelepipedo galleggia, la sua forza peso deve uguagliare la spinta di Archimede; questa, a sua volta, è uguale al peso di una volume di acqua uguale al volume della parte immersa del parallelepipedo. Poiché la porzione immersa è alta $h - x$ il volume della parte immersa è $S(h-x)$; quindi, la spinta di Archimede si trova quindi moltiplicando questo volume per la densità ρ_l dell'acqua per l'accelerazione di gravità:

$$F_A = \rho_l S(h-x) g \ ;$$

questa espressione deve uguagliare il peso del parallelepipedo che si può trovare moltiplicando il suo volume totale Sh per la sua densità per l'accelerazione di gravità; quindi

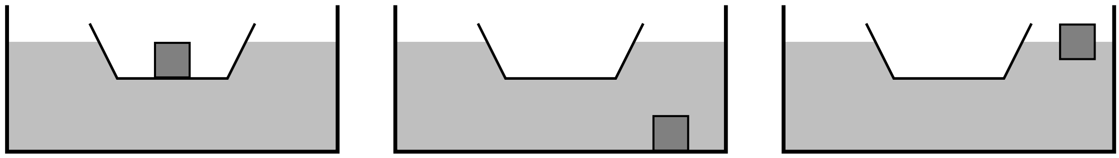
$$\rho_l S(h-x) g = \rho S h g \qquad \longrightarrow \qquad x = \frac{\rho_l - \rho}{\rho_l} h = 6.0\,\mathrm{cm} \ .$$

*__Problema 2__

Una barca di massa M contenente un corpo di massa m e densità ρ in una vasca d'acqua di densità ρ_l; il corpo viene quindi lanciato fuori bordo; stabilire come varia il livello dell'acqua rispetto al bordo della vasca nei casi

① il corpo affonda;

② il corpo galleggia.



Soluzione

① Con riferimento alla figura, nel caso A viene spostato un volume d'acqua V_A sufficiente al galleggiamento della barca e del corpo; vale dunque

$$(m+m)g = V_A \rho_l g \qquad \longrightarrow \qquad V_A = \frac{M+m}{\rho_l} \; .$$

Nel caso B viene spostato un volume d'acqua V_1 sufficiente al galleggiamento della sola barca, piú un volume V_2 uguale al volume del corpo; tali volumi sono dati da

$$Mg = V_2 \rho_l g \quad \longrightarrow \quad V_1 = \frac{M}{\rho_l} \qquad , \qquad V_2 = \frac{m}{\rho}$$

pertanto il volume totale spostato nel caso B è

$$V_B = V_1 + V_2 = \frac{M}{\rho_l} + \frac{m}{\rho} \; .$$

Ora poiché il corpo affonda la sua densità è maggiore di quella dell'acqua e quindi $V_B < V_A$, infatti si ha

$$V_B < V_A \quad \longleftrightarrow \quad \frac{M}{\rho_l} + \frac{m}{\rho} < \frac{M}{\rho_l} + \frac{m}{\rho_l} \quad \longleftrightarrow \quad \frac{m}{\rho} < \frac{m}{\rho_l} \quad \longleftrightarrow \quad \rho > \rho_l \; .$$

Quindi se nel caso B viene spostata meno acqua che nel caso A significa che il livello dell'acqua nella vasca si abbassa.

② Nel caso C viene spostato un volume d'acqua V_3 sufficiente al galleggiamento della sola barca, piú un volume V_4 sufficiente al galleggiamento del corpo; si ha quindi un caso identico al caso A, vale infatti

$$Mg = V_3 \rho_l g \quad \longrightarrow \quad V_3 = \frac{M}{\rho_l} \qquad , \qquad mg = V_4 \rho_l g \quad \longrightarrow \quad V_4 = \frac{m}{\rho_l} \; ;$$

pertanto il volume d'acqua spostato nel caso C è

$$V_C = V_3 + V_4 = \frac{M+m}{\rho_l} = V_A$$

quindi nel caso C il livello d'acqua nella vasca resta invariato.

7.2 Dinamica dei liquidi

Un liquido si dice *perfetto* se è incomprimibile e non viscoso; in questa sezione che si limita a considerare liquidi perfetti il cui moto sia *stazionario* e *irrotazionale*. Si dice stazionario il moto di un liquido in cui la velocità delle molecole che lo compongono dipenda dalla posizione ma non dal tempo; si dice irrotazionale il moto di un liquido che non forma vortici.

7.2.1 Portata e teorema di Bernoulli

Si consideri un liquido che fluisce in un tubo a sia S l'area di una sezione del tubo, e sia ΔV il volume di liquido che fluisce attraverso la sezione nell'intervallo di tempo Δt; si definisce *portata* media del liquido attraverso la sezione in questione il rapporto

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} \ .$$

Se il tubo è sufficientemente sottile da poter considerare costante la velocità $\boldsymbol{v}$ in tutti i punti della sezione, indicando con $\boldsymbol{n}$ il versore perpendicolare alla sezione, si può dimostrare che vale

$$Q = S\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \ .$$

Nel caso particolare in cui la sezione sia perpendicolare alla velocità del liquido, la precedente equazione si semplifica nella

$$Q = Sv \ .$$

Per un liquido incomprimibile la portata è la stessa attraverso qualsiasi sezione (*equazione di continuità*). Per un liquido perfetto in moto stazionario e irrotazionale di densità ρ, vi è una relazione, detta *teorema di Bernoulli*, fra la sua pressione p, il modulo v della sua velocità e la sua quota h; il moto del liquido infatti si svolge il modo tale che in tutti i punti di esso sia costante la quantità

$$p + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{costante} \ .$$

PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Un tubo di gomma per annaffiare un giardino ha diametro $d_1 = 1.5\,\text{cm}$ e viene tenuto orizzontale ad un'altezza $h = 1.2\,\text{m}$ da terra; il tubo finisce con un erogatore avente diametro $d_2 = 2\,\text{mm}$; sapendo che nel tubo scorre acqua con una velocità di modulo $v_1 = 1.7\,\text{m/s}$ determinare la gittata dell'acqua.

Soluzione

Poiché la portata ha lo stesso valore all'interno del tubo e all'erogatore, vale la relazione

$$\frac{\pi}{4} d_1^2 v_1 = \frac{\pi}{4} d_2^2 v_2 \qquad \longrightarrow \qquad v_2 = \frac{d_1^2}{d_2^2} v_1 \ .$$

A questo punto le equazioni del moto del getto d'acqua sono

$$\begin{cases} x(t) = v_2 t \\ t(t) = h - \dfrac{1}{2} g t^2 \ , \end{cases}$$

il getto d'acqua quindi arriva a terra quando $y = 0$, cioè all'istante

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

e quindi la gittata richiesta è

$$G = v_2 t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \frac{d_1^2}{d_2^2} v_1 = 28\,\text{m} \ .$$

Problema 2

Un fiume, in punto in un cui è largo $d_1 = 12\,\text{m}$ e profondo $h_1 = 3.5\,\text{m}$, riceve l'acqua di un affluente largo $d_2 = 4.5\,\text{m}$ e profondo $h_2 = 1.7\,\text{m}$; sapendo che prima della confluenza i moduli delle velocità dei due corsi d'acqua sono rispettivamente $v_1 = 3.2\,\text{m/s}$ e $v_2 = 1.8\,\text{m/s}$ e che dopo la confluenza le dimensioni del letto del fiume restano invariate, determinare il modulo v della velocità dell'acqua del fiume dopo la confluenza.

Soluzione

La portata prima e dopo la confluenza è uguale; si ha quindi

$$h_1 d_1 v_1 + h_2 v_2 v_2 = h_1 d_1 v \qquad \longrightarrow \qquad v = v_1 + \frac{h_2 v_2}{h_1 v_1} v_2 = 3.5\,\mathrm{m/s}\ .$$

Problema 3

In un tubo orizzontale di sezione S_1 che ha una strozzatura che ne riduce il raggio alla metà, viene fatta scorrere acqua alla velocità di modulo $v_1 = 4.2\,\mathrm{m/s}$; determinare

① il modulo v_2 della velocità nella strozzatura;

② la differenza di pressione fra tubo e strozzatura.

Soluzione

① Se la strozzatura ha il raggio metà del raggio del tubo, la sezione della strozzatura è un quarto della sezione del tubo; quindi per la costanza della portata si ha

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 = \frac{1}{4} v_2 S_1 \qquad \longrightarrow \qquad v_2 = 4 v_1 = 16.8\,\mathrm{m/s}\ .$$

② Nel caso presente il teorema di Bernoulli si scrive nella forma

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

e quindi

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) = \frac{15}{2}\rho v_1^2 = 1.3 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}\ .$$

Problema 4

Da una botte cilindrica di raggio $r_1 = 40\,\mathrm{cm}$ viene spillato il vino per mezzo di un rubinetto che si trova $h = 80\,\mathrm{cm}$ piú in basso della superficie libera del vino; determinare il modulo della velocità di uscita del vino dal rubinetto.

Soluzione Il vino che esce dal rubinetto e il vino sulla superficie libera nella botte sono in equilibrio con l'atmosfera e quindi la pressione del vino nei due casi è uguale alla pressione atmosferica; inoltre, supponendo che la discesa del vino all'interno della botte sia molto lenta, è possibile trascurare la velocità della superficie libera; in questo caso, quindi, la legge di Bernoulli diviene

$$\rho g h = \frac{1}{2}\rho v^2 \qquad \longrightarrow \qquad v = \sqrt{2gh} = 4.0\,\mathrm{m/s}\ .$$

Si noti che la velocità di uscita è quella che si avrebbe se il vino cadesse liberamente dall'altezza h.

7.2.2 Esercizi

Pressione

✍ **Es. 1** — Un uomo di massa $m = 65\,\mathrm{kg}$ è in piedi sulla neve; sapendo che la neve sopporta senza cedere una pressione totale, inclusa la pressione atmosferica, $p = 1.1 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$; stabilire se l'uomo affonda nella neve indossando

a) due scarponi ciascuno di massa $m_1 = 0.75\,\mathrm{kg}$ con suole di area $S_1 = 2.0\,\mathrm{dm}^2$;

b) due sci ciascuno di massa $m_2 = 1.0\,\mathrm{kg}$ di superficie $S_2 = 16\,\mathrm{dm}^2$.

☞ **Es. 2** — Due superfici semisferiche di raggio $r = 20\,\mathrm{cm}$ sono accostate in modo da ricostruire la sfera; quindi dall'interno della sfera si toglie tutta l'aria facendo il vuoto; determinare il modulo della forza necessaria a separare il due semisfere.

☞ **Es. 3** — I quattro pneumatici di un'automobile sono gonfiati con una pressione relativa (cioè la pressione interna meno la pressione atmosferica esterna) $p = 250\,\mathrm{kPa}$; sapendo che la superficie di appoggio di ciascun pneumatico ha area $S = 200\,\mathrm{cm}^2$, determinare la massa dell'automobile.

✐ **Es. 4** — Un cilindro è tenuto appeso con il pistone, di massa trascurabile e area $S = 24\,\mathrm{cm}^2$, verso il basso; al pistone è appeso un carico di massa $m = 5.4\,\mathrm{kg}$; all'interno del cilindro una pompa mantiene una pressione costante p minore della pressione atmosferica esterna; sapendo che il pistone scende percorrendo $d = 20\,\mathrm{cm}$ in $t = 4.2\,\mathrm{s}$, determinare la pressione interna al cilindro.

Legge di Stevin

✍ **Es. 1** — Sapendo che la densità del sangue è $\rho = 1060\,\mathrm{kg/m^3}$, determinare la pressione minima con cui il cuore deve pompare il sangue per farlo arrivare al cervello che si trova $h = 450\,\mathrm{mm}$ piú in alto.

✍ **Es. 2** — Supponendo che l'aria si possa considerare un liquido perfetto di densità $\rho = 1.2\,\mathrm{kg/m^3}$ determinare a che altezza dal livello del mare la pressione atmosferica vale $p = 0.8p_0$.

✍ **Es. 3** — Una pompa aspira dell'acqua lungo un tubo verticale; determinare la massima altezza che può raggiungere l'acqua.

✍ **Es. 4** — Un sottomarino si trova ad $h = 180\,\mathrm{m} =$ di profondità sotto il livello del mare; il suo portello circolare ha raggio $r = 56.0\,\mathrm{cm}$; sapendo che l'acqua marina ha densità $\rho = 1025\,\mathrm{kg/m^3}$; determinare la forza totale esercitata sul portello, nei seguenti casi:

a) la pressione all'interno del sottomarino è trascurabile;

b) la pressione dell'aria all'interno è uguale a quella atmosferica.

✍ **Es. 5** — Un orologio subacqueo di superficie $S = 3.5\,\mathrm{cm}^2$ può sopportare una forza massima di modulo $F = 375\,\mathrm{N}$; sapendo che la densità dell'acqua di mare è $\rho = 1025\,\mathrm{kg/m^3}$, determinare la profondità alla quale può essere portato senza venire schiacciato.

☞ **Es. 6** — Un cubo di ferro cavo di spigolo $\ell = 35\,\mathrm{cm}$ è pieno d'aria a pressione atmosferica; esso viene spinto sott'acqua, in mare, fino a una profondità $h = 23\,\mathrm{m}$ ove implode; sapendo che la densità dell'acqua marina è $\rho = 1025\,\mathrm{kg/m^3}$, determinare

a) il modulo della forza esterna agente su ciascuna parete del cubo;

b) il modulo della forza totale agente su ciascuna parete del cubo;

c) la profondità H a cui sarebbe potuto arrivare il cubo se la sua pressione interna fosse stata $p = 3p_0$.

☞ **Es. 7** — La superficie del mar Morto, la cui acqua ha densità $\rho = 1240\,\mathrm{kg/m^3}$, si trova ad $h_1 = 423\,\mathrm{m}$ sotto il livello del mare; considerando l'aria come un liquido perfetto di densità $\rho_1 = 1.2\,\mathrm{kg/m^3}$; determinare la pressione alla profondità $h = 20\,\mathrm{m}$ sotto la superficie del mar Morto.

☞ **Es. 8** — Una barca ha un foro circolare di raggio $r = 5.0\,\mathrm{cm}$ posto alla profondità $h = 1.2\,\mathrm{m}$ sotto il livello dell'acqua; la falla è chiusa da un tappo; sapendo che la pressione all'interno della barca è quella atmosferica, determinare

a) il modulo della forza che il tappo deve essere in grado di sopportare;

b) come cambia il modulo di tale forza se il foro avesse raggio doppio.

☞ **Es. 9** — Due vasi cilindrici di superficie di base $S = 450\,\mathrm{cm}^2$, posati sullo stesso piano orizzontale, contengono acqua alle diverse altezze $h_1 = 20\,\mathrm{cm}$ e $h_2 = 30\,\mathrm{cm}$; una volta messi in comunicazione l'acqua passa da un vaso all'altro fino a che le due altezza diventano uguali; determinare il lavoro fatto dalla forza peso.

Legge di Archimede

✍ **Es. 1** — Un'asse di legno di volume $V = 0.03\,\mathrm{m}^3$ e densità $\rho = 687\,\mathrm{kg/m}^3$ galleggia in acqua di mare ($\rho_l = 1025\,\mathrm{kg/m}^3$; determinare

a) il volume V_i della parte immersa;

b) la massa che si deve porre sull'asse perché sia completamente immersa.

✍ **Es. 2** — Un tronco di volume V è immerso per l'80% in acqua salata di densità $\rho_l = 1030\,\mathrm{kg/m}^3$; determinare

a) la densità del tronco;

b) la percentuale del volume che sarebbe immersa se il liquido fosse mercurio, la cui densità è $\rho_{Hg} = 13600\,\mathrm{kg/m}^3$.

✍ **Es. 3** — Su una zattera di legno ha massa $m_1 = 500\,\mathrm{kg}$ e densità $\rho = 720\,\mathrm{kg/m}^3$ salgono tre persone aventi massa totale $M_2 = 180\,\mathrm{kg}$; determinare il volume emerso della zattera.

☞ **Es. 4** — Un cilindro di legno è fissato sul fondo di un lago con una corda; un sommozzatore recide la corda e osserva che il cilindro sale con un'accelerazione di modulo $a = 2.0\,\mathrm{m/s}^2$; determinare

a) la densità ρ_1 cilindro;

b) il modulo dell'accelerazione se la densità del cilindro fosse $\rho_2 = 800\,\mathrm{kg/m}^3$.

☞ **Es. 5** — Un corpo di legno di massa $m = 14\,\mathrm{kg}$ e densità $\rho = 720\,\mathrm{kg/m}^3$ è immerso interamente in acqua, legato al fondo da una corda; determinare

a) il modulo della tensione della corda;

b) l'accelerazione di salita se la corda viene recisa.

☞ **Es. 6** — Una persona di massa $m = 81\,\mathrm{kg}$ e volume $V = 89\,\mathrm{l}$ galleggia in acqua di mare di densità $\rho_l = 1030\,\mathrm{kg/m}^3$; determinare

a) il volume emerso V_e;

b) il modulo della forza con cui deve essere spinto verso l'alto perché il volume emerso aumenti di $\Delta V = 1.8\,\mathrm{l}$.

☞ **Es. 7** — Un iceberg ha volume emerso $V_e = 1.6 \cdot 10^4\,\mathrm{m}^3$; sapendo che la densità del ghiaccio è $\rho_g = 920\,\mathrm{kg/m}^3$, mentre quella dell'acqua di mare è $\rho_l = 1025\,\mathrm{kg/m}^2$, determinare il volume totale dell'iceberg.

☞ **Es. 8** — Una nave di massa $m = 9700\,\mathrm{t}$ naviga inizialmente in mare la cui acqua ha densità $\rho_1 = 1030\,\mathrm{kg/m}^3$, entra quindi in un fiume la cui acqua ha densità $\rho_2 = 1000\,\mathrm{kg/m}^3$;

a) stabilire se la linea di galleggiamento si alza o si abbassa;

b) calcolare il volume immerso della nave nei due casi.

☞ **Es. 9** — Una barca di massa m_1, passando da acqua di mare, di densità $\rho_1 = 1025\,\mathrm{kg/m}^3$ ad acqua dolce, di densità $\rho_2 = 1000\,\mathrm{kg/m}^3$, affonda leggermente; se dalla barca viene gettata una zavorra di massa $m_2 = 50\,\mathrm{kg}$ essa ritorna al livello iniziale; determinare la massa iniziale della barca.

☞ **Es. 10** — Un blocco di ferro avente massa $m = 800\,\mathrm{g}$ e densità $\rho = 7874\,\mathrm{kg/m^3}$ contiene una cavità; se immerso in acqua ha una diminuzione di peso di modulo $\Delta P = 1.6\,\mathrm{N}$; determinare il volume della cavità.

✐ **Es. 11** — Una corona di massa $m_1 = 500\,\mathrm{g}$ è fatta di una lega di oro, di densità $\rho_{Au} = 19320\,\mathrm{kg/m^3}$, e argento, di densità $\rho_{Ag} = 10490\,\mathrm{kg/m^3}$; se pesata mentre è immersa in acqua risulta una massa $m_2 = 470\,\mathrm{g}$; determinare la massa m dell'oro presente nella corona.

✐ **Es. 12** — In un recipiente cilindrico di sezione $S = 0.05\,\mathrm{m^2}$ contiene acqua; determinare di quanto varia la pressione sul fondo del recipiente quando nell'acqua viene posto un blocco di legno di massa $m = 2.4\,\mathrm{kg}$.

✐ **Es. 13** — Un cubetto di ghiaccio galleggia nell'acqua di un recipiente; stabilire se il livello dell'acqua nel recipiente aumenta, diminuisce o resta invariato quando il cubetto si è sciolto completamente.

✐ **Es. 14** — Una piscina è riempita di un liquido ignoto; una misura di pressione effettuata a profondità $h = 2.0\,\mathrm{m}$ dà il valore $p = 117960\,\mathrm{Pa}$; una persona di massa $m = 70\,\mathrm{kg}$ e densità $\rho = 920\,\mathrm{kg/m^3}$ si immerge nel liquido; determinare il modulo dell'accelerazione con cui la persona va a fondo.

Portata e teorema di Bernoulli

☞ **Es. 1** — In un edificio l'acqua scorre al primo piano, in un tubo di diametro $d_1 = 6.0\,\mathrm{cm}$, con velocità di modulo $v_1 = 45\,\mathrm{cm/s}$ alla pressione $p = 50\,\mathrm{kPa}$; al piano superiore, che si trova $h = 4.2\,\mathrm{m}$ più in alto, vi è un tubo di diametro $d_2 = 2.0\,\mathrm{cm}$; determinare la pressione e il modulo della velocità con cui l'acqua esce dai rubinetti del secondo piano.

☞ **Es. 2** — Un bacino d'acqua è trattenuto da una diga; alla profondità $h = 3.5\,\mathrm{m}$ si trova un tubo orizzontale che attraversa la diga di sezione $S = 0.12\,\mathrm{m^2}$ con un tappo sul fondo;

a) determinare la forza che deve esercitare il tappo per trattenere l'acqua;

b) se il tappo viene rimosso quale volume d'acqua fuoriesce nel tempo $t = 5\,\mathrm{min}$.

☞ **Es. 3** — Una piscina di volume $V = 320\,\mathrm{m^3}$ viene riempita per mezzo di un tubo di gomma di raggio $r = 1.5\,\mathrm{cm}$; sapendo che la velocità dell'acqua nel tubo ha modulo $v = 2.8\,\mathrm{m/s}$, determinare il tempo impiegato a riempire la piscina.

☞ **Es. 4** — Un tubo di gomma per irrigazione posto a terra ha un forellino da cui fuoriesce uno zampillo d'acqua che raggiunge l'altezza $h = 32.0\,\mathrm{cm}$; sapendo che all'interno del tubo l'acqua scorre con velocità di modulo $v = 1.50\,\mathrm{m/s}$, determinare la pressione all'interno del tubo.

☞ **Es. 5** — Una fontana è costituita da un recipiente in cui è contenuta dell'acqua la cui superficie libera è mantenuta all'altezza $h_1 = 100\,\mathrm{cm}$ dal suolo; l'acqua fuoriesce da recipiente attraverso un foro praticato sulla parete del recipiente a $h_2 = 75\,\mathrm{cm}$, dal suolo; determinare

a) la distanza a cui lo zampillo arriva a terra;

b) quanto deve valere h_2 perché tale distanza sia massima.

☞ **Es. 6** — Due tubi orizzontali aventi diametro $d_1 = 2.8\,\mathrm{cm}$ e $d_2 = 1.6\,\mathrm{cm}$ sono connessi fra loro; sapendo che la differenza di pressione fra i due tubi è $\Delta p = 7.5\,\mathrm{kPa}$, determinare la velocità dell'acqua nei due tubi.

✐ **Es. 7** — Durante un uragano con vento alla velocità di modulo $v = 120\,\mathrm{km/h}$ un tetto viene divelto dalla differenza di pressione, fra interno ed esterno Δp; se la superficie del tetto è $S = 50\,\mathrm{m^2}$; considerando l'aria come in liquido incomprimibile di densità $\rho = 1.2\,\mathrm{kg/m^3}$, determinare il modulo della forza che ha agito sul tetto.