0-CALCOLO VETTORIALE

0-01 - Dimostrare che i vettori

$$3\hat{x} - 2\hat{y} + \hat{z} \qquad \hat{x} - 3\hat{y} + 5\hat{z} \qquad 2\hat{x} + \hat{y} - 4\hat{z}$$

formano un triangolo rettangolo.

0-02 - Dimostrare che se $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ (cioè se i tre vettori formano un triangolo) allora:

$$\vec{a} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$$

da queste tre relazioni dedurre il teorema dei seni.

0-03 - Dato un generico quadrilatero $ABCD$, dimostrare che il quadrilatero che ha per vertici i punti di mezzo dei suoi lati è un parallelogramma.
Suggerimento : $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0}$.

0-04 - Utilizzando le proprietà del prodotto scalare, dimostrare la relazione trigonometrica:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

0-05 - Dimostrare che se la somma di due vettori è perpendicolare alla loro differenza, i due vettori hanno modulo uguale.

0-06 - Determinare i due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ che sodisfano le relazioni:

$$\vec{a} + \vec{b} = 2\hat{x} - \hat{y} \qquad \vec{a} - \vec{b} = \hat{x} + 2\hat{y}$$

e l'angolo da essi formato.

0-07 - Utilizzando le proprietà del prodotto scalare, dimostrare il teorema di Carnot.

0-08 - Dato il vettore del piano xy:

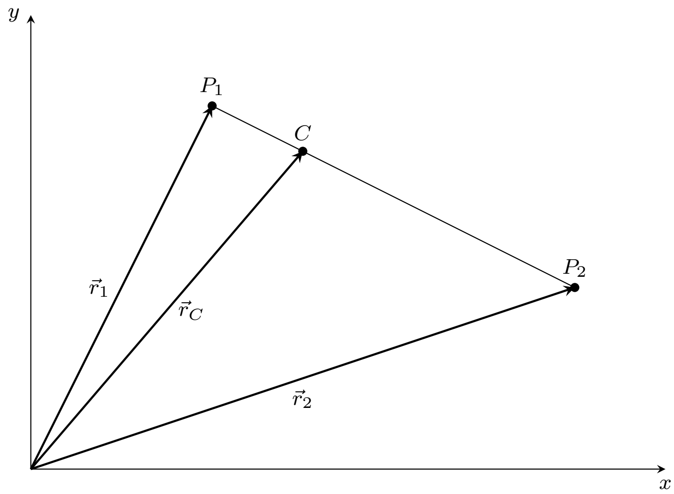
$$\vec{v} = a\hat{x} + b\hat{y}$$

Scrivere l'espressione dei due vettori dello stesso piano che sono perpendicolari a $\vec{v}$ ed hanno lo stesso modulo.
Una volta scritti i due vettori potete ragionare su come scrivere l'espressione di *tutti* i vettori dello spazio (cioè con componente z non nulla) che hanno la stessa proprietà.

0-09 - Centro di massa
Date due particelle di massa m_1 e m_2 che si trovano nei punti P_1 e P_2 ed i loro vettori posizione $\vec{r}_1$ ed $\vec{r}_2$, il loro centro di massa è definito come il punto C che ha per vettore posizione:

$$\vec{r}_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Dimostrare che C appartiene al segmento P_1P_2.
Per completare la formulazione matematica del problema bisogna specificare, cosa ovvia in fisica, che m_1 ed m_2 sono positive.



0-10 - Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e le loro componenti in una terna cartesiana ortogonale dimostrare che:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

0-11 - Prodotto triplo

Dati tre vettori $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ e le loro componenti in una terna cartesiana ortogonale dimostrare che:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

E verificare che:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

0-12 - Divisione scalare tra vettori ?

Dato un vettore $\vec{v}$ è possibile determinare un vettore $\vec{x}$ tale che si abbia:

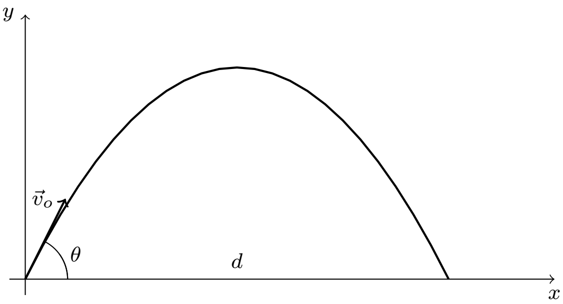
$$\vec{x} \cdot \vec{v} = 1?$$

La risposta ci fa capire perchè non ha senso definire il reciproco di un vettore e quindi non ha senso definire una 'divisione scalare' fra vettori.

1-CINEMATICA E DINAMICA DEL PUNTO

1-01 - Durante un sorpasso, due automobili A e B stanno procedendo parallelamente su una strada rettilinea con velocità v_A e v_B. Quando A si trova ad una distanza d, misurata lungo l'asse della strada, dietro B, il conducente rinuncia al sorpasso ed inizia a rallentare con accelerazione $-a$. Dimostrare che il sorpasso non avviene se $v_A - v_B < \sqrt{2ad}$ e verificare dimensionalmente questa espressione. Nel caso contrario, calcolare il tempo a cui avviene, misurato a partire dall'istante in cui A inizia a rallentare.

1-02 - Un proiettile viene lanciato dal suolo con velocità iniziale $\vec{v}_o$ e deve colpire un punto sul suolo distante d dal punto di lancio.
a) Calcolare l'angolo che $\vec{v}_o$ deve formare con il piano orizzontale.
b) Calcolare il valore minimo di v_o necessario affinchè il proiettile raggiunga il bersaglio.

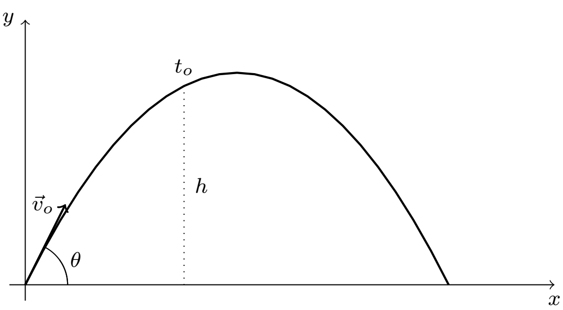


---

a) Scegliamo gli assi come rappresentato in figura. Poichè il moto sotto l'azione della forza di gravità è un moto piano, il proiettile può raggiungere il bersaglio solo se $\vec{v}_o$ giace nel piano xy. Nel sistema di riferimento scelto l'accelerazione di gravità è data da $-g\hat{y}$; indicando con θ l'angolo che $\vec{v}_o$ forma con l'asse x, le coordinate x e y del proiettile in funzione del tempo t (scegliendo $t = 0$ all'istante del lancio) sono date da:
$x = v_o \cos\theta t \qquad ; \qquad y = v_o \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (*)$
y si annulla per $t = 0$ (istante del lancio) e $t = \frac{2v_o \sin\theta}{g}$ (istante in cui il proiettile colpisce il suolo); sostituendo quest'ultima espressione in quella di x otterremo la coordinata x del punto d'impatto, x_i; x_i è dunque la gittata del proiettile:
$x_i = \frac{2{v_o}^2 \sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{{v_o}^2 \sin 2\theta}{g}$ (*)
imponendo che x_i sia uguale a d otteniamo: $\sin 2\theta = \frac{dg}{{v_o}^2}$ da cui si ricava l'espressione di θ.
b) dalla (*) osserviamo che, per un dato valore di v_o, il valore massimo possibile della gittata si ha per $\theta = \frac{\pi}{4}$:
$x_{imax} = \frac{{v_o}^2}{g}$
perchè il proiettile raggiunga il bersaglio tale valore deve essere maggiore o uguale a d, quindi la condizione richiesta si scrive: $v_o \geq \sqrt{gd}$.

In alternativa possiamo utilizzare l'equazione cartesiana della traiettoria:
Ricaviamo t dalla prima delle (*) e lo sostituiamo nella seconda:
$t = \frac{v_o}{\cos\theta} \qquad \Rightarrow \qquad y = \tan\theta\, x - \frac{1}{2}g\frac{1}{v_o^2\cos^2\theta}x^2$
Imponendo $y = 0$ in quest'ultima equazione troviamo le coordinate x dei due punti in cui la palla si trova al livello del suolo, che sono il punto di lancio ed il punto d'impatto.

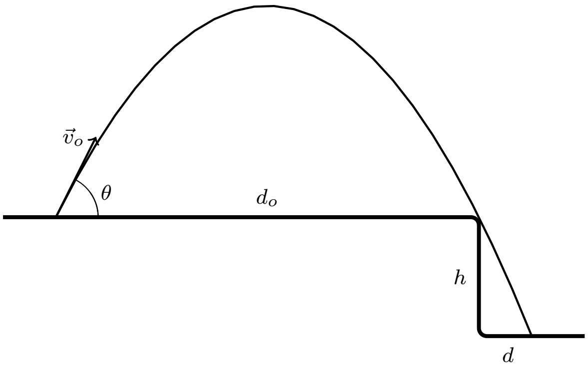
1-03 - Un pallone viene lanciato dal suolo al tempo $t = 0$ con velocità iniziale $\vec{v}_o$ e raggiunge la quota h al tempo $t = t_o$.
a) Calcolare il modulo della velocità iniziale in funzione di h, t_o, θ;
b) dimostrare che il secondo passaggio dalla quota h avviene al tempo $t_1 = \frac{2h}{t_o g}$.
Trascurare la resistenza dell'aria.



---

a) Scegliendo il sistema di riferimento come in figura, la coordinata y del pallone in funzione del tempo è data da:
$y(t) = v_o \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2$ (*)
imponendo che per $t = t_o$ $y(t)$ sia uguale ad h otteniamo:
$v_o = \frac{h + \frac{1}{2}gt_o^2}{t_o \sin\theta}$ (**)
b) ponendo nella (*) $y(t) = h$ e risolvendo l'equazione in t otteniamo i due tempi di passaggio dalla quota h:
$t = \frac{v_o \sin\theta \pm \sqrt{v_o^2 \sin^2\theta - 2gh}}{g}$

sostituendo v_o da (**) (o meglio, per rendere più semplici i passaggi, $v_o \sin\theta = \frac{h}{t_o} + \frac{1}{2} g t_o$) otteniamo le due soluzioni $t = t_o$ e $t = \frac{2h}{t_o g}$.

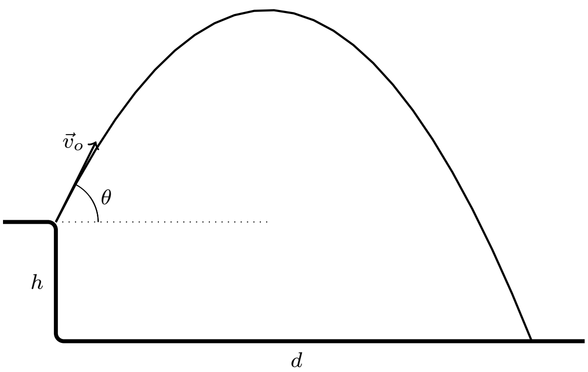


1-04a - Vogliamo far superare ad una palla il dislivello rappresentato in figura.
a) Dati θ e d_o, calcolare il valore minimo del modulo della velocità iniziale;
b) nel caso in cui il modulo della velocità iniziale assuma tale valore minimo, calcolare d in funzione di θ, d_o ed h.
Trascurare la resistenza dell'aria.

Scegliamo l'origine del sistema di riferimento nel punto di lancio, l'asse x orizzontale verso destra e l'asse y verticale verso l'alto; l'equazione della traiettoria si scrive:
$y = \tan\theta\, x - \frac{1}{2} g \frac{1}{v_o^2 \cos^2\theta} x^2 \qquad (*)$
a) Imponiamo che tale traiettoria sfiori lo spigolo in alto del dislivello, cioè passi dal punto $(d_o, 0)$:
$0 = \tan\theta\, d_o - \frac{1}{2} g \frac{1}{v_o^2 \cos^2\theta} d_o^2 \quad \Rightarrow \quad v_o^2 = \frac{g d_o}{\sin(2\theta)}$
Il valore di v_o che si ottiene da quest'ultima espressione è il valore minimo richiesto, perchè per valori maggiori la palla andrà oltre lo spigolo.
Sostituendo tale espressione nella (*) ed imponendo $y = -h$ otteniamo un'equazione in x le cui soluzioni sono le coordinate x dei punti di passaggio della traiettoria dalla quota $-h$:
$x = \frac{d_o}{2}\left[1 \mp \sqrt{1 + 4\frac{h}{d_o \tan\theta}}\right]$
La prima soluzione, negativa, è relativa al passaggio della traiettoria prolungata all'indietro dalla quota h; la seconda è la coordinata del punto d'impatto. Per ricavare d dobbiamo sottrarre d_o da questa coordinata:
$d = \frac{d_o}{2}\left[\sqrt{1 + 4\frac{h}{d_o \tan\theta}} - 1\right]$

L'espressione di v_o^2 si può anche ottenere imponendo che la gittata sia uguale a d_o.

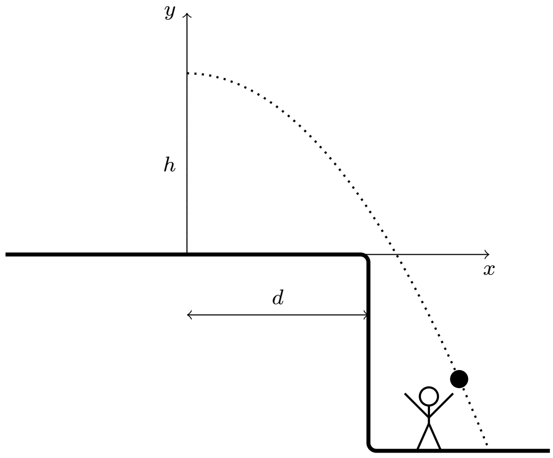
Provate a trovare d scrivendo l'equazione cartesiana della traiettoria in un sistema con l'origine nello spigolo del dislivello.



1-04b - Un pallone viene lanciato dalla sommità di un edificio, come rappresentato in figura. Calcolare la distanza d del punto di caduta dalla base dell'edificio in funzione delle altre quantità indicate in figura.
Trascurare la resistenza dell'aria.

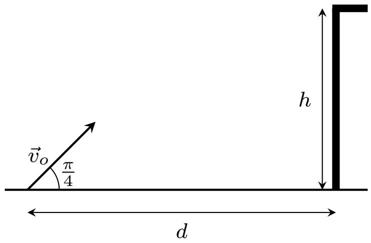
$d = \frac{v_o^2 \cos^2\theta}{g}\left(\tan\theta + \sqrt{\tan^2\theta + 2hg\frac{1}{v_o^2\cos^2\theta}}\right)$
Verificare che per $h = 0$ si ritrova l'usuale espressione della gittata.

1-05 - Un aereo deve lanciare un pacco di viveri facendogli superare il dislivello rappresentato in figura. Calcolare, in funzione delle altre quantità rappresentate in figura, il massimo valore della distanza d. Trascurare la resistenza dell'aria.



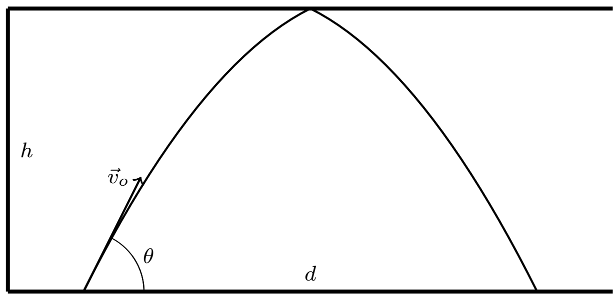
Utilizziamo il sistema di riferimento rappresentato in figura.
Leggi orarie : $y = h - \frac{1}{2}gt^2$; $x = v_o t$
Equazione della traiettoria: $y = h - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_o}\right)^2$
Imponiamo che la traiettoria passi dallo spigolo del dislivello, che ha coordinate $(d, 0)$:
$0 = h - \frac{1}{2}g\left(\frac{d}{v_o}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad d = v_o\sqrt{\frac{2h}{g}}$
(la soluzione negativa è relativa al punto d'incontro della traiettoria col suolo a sinistra del punto di lancio)
Il valore di d ottenuto costituisce il valore limite per cui il pacco supera il dislivello; per valori maggiori il pacco non lo supera.

1-06 - Un pallone viene lanciato dalla posizione indicata in figura con una velocità iniziale $\vec{v}_o$ che forma un angolo $\frac{\pi}{4}$ con l'orizzontale . Calcolare il valore minimo di v_o affinchè il pallone cada sul tetto di un edificio di altezza h che si trova a distanza d dal punto di lancio. Trascurare la resistenza dell'aria.



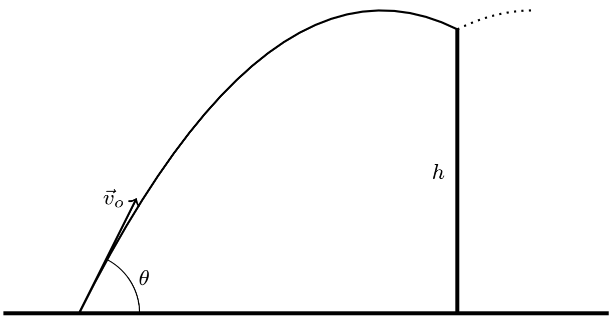
Calcoliamo il valore di v_o per il quale il pallone tocca il vertice dell'edificio; per valori di v_o maggiori il pallone supererà tale vertice e ricadrà sul tetto.
Scegliendo l'origine del sistema di riferimento nel punto di lancio del pallone, le sue coordinate in funzione del tempo sono date da:
$x(t) = v_o \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)t$; $y(t) = v_o \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)t - \frac{1}{2}gt^2$
uguagliandole alle coordinate del vertice dell'edificio:
$v_o \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)t = d$; $v_o \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)t - \frac{1}{2}gt^2 = h$
otteniamo un sistema di equazioni in t e v_o che ha per soluzioni positive:
$v_o = \sqrt{\frac{gd^2}{d-h}}$; $t = \frac{d}{v_o \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}$
notiamo che tali soluzioni hanno significato fisico solo se $d > h$; perchè ?
Non essendo indicata nel problema la larghezza dell'edificio, non consideriamo la possibilità che il pallone lo superi e ricada dall'altro lato. Data tale larghezza, potremmo calcolare anche il valore massimo di v_o.

1-07a - Una palla viene lanciata in una stanza, rimbalza elasticamente sul soffitto e ricade sul pavimento. Date le quantità v_o, θ, h indicate in figura, calcolare la distanza d dal punto di partenza alla quale la palla ricade. Trascurare la resistenza dell'aria.



Dobbiamo scrivere l'equazione della traiettoria ((*) dell'esercizio 1-04a) ed imporre $y = h$; l'equazione ha due soluzioni entrambe positive: la più piccola corrisponde al primo passaggio dalla quota h, l'altra al secondo passaggio, quando la palla, se non ci fosse il soffitto, sarebbe in discesa. Per il problema interessa la prima, che corrisponde a $\frac{d}{2}$, come è evidente dalla figura.

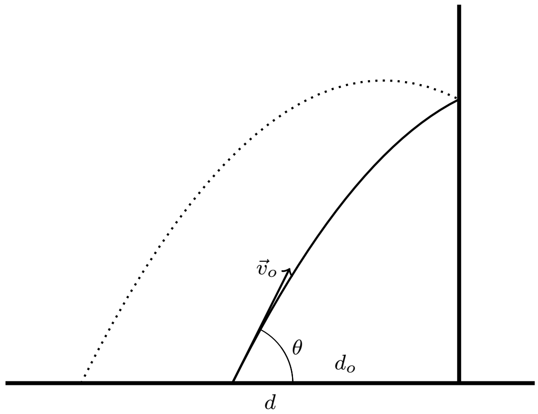
1-08 - Una palla viene lanciata e rimbalza elasticamente sulla sommità di una parete. Date le quantità v_o, θ, h indicate in figura, calcolare la distanza d dalla parete alla quale la palla ricade. Trascurare la resistenza dell'aria.



$d = \frac{v_o^2 \cos^2\theta}{g}\left[\tan\theta + \sqrt{\tan^2\theta - \frac{2gh}{v_o^2\cos^2\theta}}\right] =$
$= \frac{v_o^2 sin\theta\cos\theta}{g}\left[1 + \sqrt{1 - \frac{2gh}{v_o^2\sin^2\theta}}\right]$

Notate la condizione per la quale l'argomento della radice è positivo.

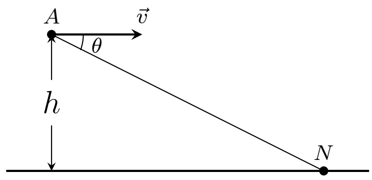
1-09 - Una palla viene lanciata contro una parete e rimbalza elasticamente. Date le quantità v_o, θ, d_o indicate in figura, calcolare la distanza d dalla parete alla quale la palla ricade. Trascurare la resistenza dell'aria.



$d + d_o =$ gittata della caduta libera $= \frac{{v_o}^2\sin 2\theta}{g}$

d e d_o sono distanze, quindi sono quantità positive.

1-10 - Un aereo A deve sganciare su un naufrago N un kit di soccorso. Utilizzando le quantità indicate in figura dimostrare che al momento dello sgancio il pilota deve vedere il naufrago sotto un angolo θ dato da $\tan\theta = \sqrt{\frac{hg}{2v^2}}$.



1-11 - La legge di gravità è uguale per tutti

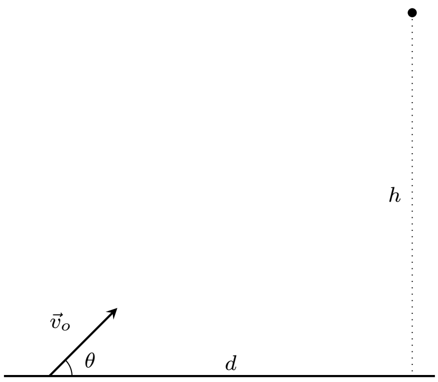
Un ragazzo vuol far cadere dei bei frutti da un albero lanciando un sasso con una fionda. Punta il lancio mirando esattamente sui frutti, ma questi sono ben maturi ed il caso vuole che si stacchino dall'albero proprio al momento del lancio. Dimostrare che il sasso colpisce i frutti.

1-12 - Un oggetto viene lasciato cadere da una quota h, partendo da fermo. Nello stesso istante in cui l'oggetto viene lasciato cadere, un proiettile viene lanciato dal suolo.

a) Calcolare, in funzione delle quantità indicate in figura, l'angolo con cui il proiettile deve essere lanciato affinchè colpisca l'oggetto;

b) calcolare il valore minimo del modulo della velocità iniziale del proiettile affinchè l'impatto avvenga al di sopra del livello del suolo.

Trascurare la resistenza dell'aria.



Scegliamo un sistema di riferimento con l'origine nella posizione iniziale del proiettile, l'asse x orizzontale e rivolto verso destra, l'asse y verticale e rivolto verso l'alto e fissiamo $t = 0$ all'istante del lancio. Le coordinate dell'oggetto e del proiettile in funzione del tempo (leggi orarie del moto) si scrivono:

$x_o(t) = d \quad ; \quad y_o(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$

$x_p(t) = v_o\cos(\theta)t \quad ; \quad y_p(t) = v_o\sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$

a) affinchè il proiettile colpisca l'oggetto, le loro coordinate x ed y devono essere uguali in un istante da determinare. Abbiamo dunque due equazioni nelle incognite t e θ:

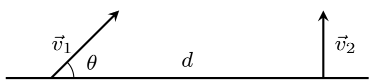
$d = v_o\cos(\theta)t \quad ; \quad h - \frac{1}{2}gt^2 = v_o\sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad h = v_o\sin(\theta)t$

dalla prima ricaviamo (indicando con t_i l'istante dell'impatto) : $\quad t_i = \frac{d}{v_o\cos\theta} \qquad$ (*)

e sostituendo nella seconda otteniamo $\tan\theta = \frac{h}{d}$ (la velocità iniziale del proiettile deve puntare alla posizione iniziale dell'oggetto).
b) Dobbiamo imporre che la coordinata y del punto di impatto sia positiva o nulla; a tal fine sostituiamo l'espressione dell'istante dell'impatto (*) in $y_o(t)$:
$y_o(t_i) = h - \frac{1}{2}g\left(\frac{d}{v_o\cos\theta}\right)^2 \geq 0.$
con qualche passaggio algebrico ed utilizzando la relazione $\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta$ otteniamo:
$v_o^2 \geq \frac{1}{2}gh\left[1 + \left(\frac{d}{h}\right)^2\right]$ (**).
Si deve ottenere lo stesso risultato sostituendo t_i in $y_p(t)$.

Si può ottenere lo stesso risultato considerando che, nel caso limite in cui l'urto avviene al suolo, la gittata del proiettile deve essere uguale a d:
$\frac{v_o^2\sin 2\theta}{g} = d$
Utilizzando la relazione: $\frac{1}{\sin\theta\cos\theta} = \cot\theta\frac{1}{\cos^2\theta} = \cot\theta\,(1+\tan^2\theta) = \frac{d}{h}\left[1 + \left(\frac{h}{d}\right)^2\right]$ si riottiene il valore limite in (**).

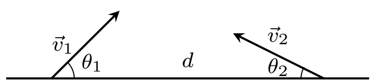
1-13 - Due palloni, che assimiliamo a due punti materiali, vengono lanciati dal suolo allo stesso instante, da due punti distanti d e con le velocità iniziali indicate in figura (il secondo viene lanciato verticalmente). Determinare θ affinchè i palloni si incontrino e l'istante di tempo a cui avviene l'incontro in funzione di v_1 , v_2 e d. Trascurare la resistenza dell'aria.



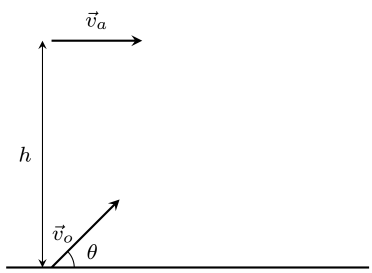
Scegliamo un sistema di riferimento con l'origine nella posizione iniziale del primo pallone, l'asse x orizzontale e rivolto verso destra, l'asse y verticale e rivolto verso l'alto e fissiamo $t = 0$ all'istante dei lanci simultanei. Le coordinate dei due palloni in funzione del tempo (leggi orarie del moto) si scrivono:
$x_1(t) = v_1\cos\theta t$; $y_1(t) = v_1\sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2$
$x_2(t) = d$; $y_2(t) = v_2 t - \frac{1}{2}gt^2$
affinchè i due palloni si incontrino, le loro coordinate x ed y devono essere uguali in un istante da determinare. Abbiamo dunque due equazioni nelle incognite t e θ. La soluzione è particolarmente semplice perchè l'accelerazione è la stessa per entrambi, e perchè partono nello stesso istante: l'uguaglianza delle coodinate y_1 e y_2 si riduce, eliminando il caso banale $t = 0$, ad una equazione in θ che ha per soluzione: $sin\theta = \frac{v_2}{v_1}$
l'uguaglianza delle x si scrive invece : $v_1\cos\theta t = d \quad\Rightarrow\quad t_o = \frac{d}{v_1\cos\theta} = \frac{d}{v_1\sqrt{1-\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2}} = \frac{d}{\sqrt{{v_1}^2-{v_2}^2}}$

dove t_o è l'istante in cui si incontrano.
Notate che sia dall'espressione di $\sin\theta$ *che da quella di* t_o *si deduce che si incontrano solo se* $v_1 > v_2$.

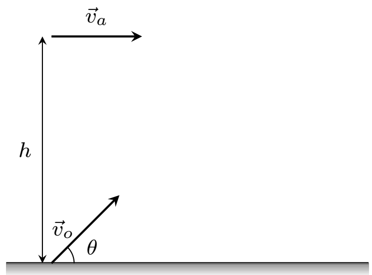
1-14 - Due palloni, che assimiliamo a due punti materiali, venngono lanciati dal suolo allo stesso instante, da due punti distanti d e con le velocità iniziali indicate in figura. Dati v_1 , v_2 e θ_1 , determinare θ_2 affinchè i palloni si incontrino e l'istante di tempo a cui avviene l'incontro. Trascurare la resistenza dell'aria.



1-15 - Un aereo sta volando orizzontalmente ad una quota h con velocità costante $\vec{v}_a$; un proiettile viene lanciato dal suolo con la velocità iniziale indicata in figura, nell'istante in cui l'aereo passa dalla verticale.
Calcolare, in funzione di v_o e v_a, l'angolo θ con cui bisogna lanciare il proiettile affinchè esso colpisca l'aereo ed il valore minimo di v_o in funzione di h, v_a e dell'accelerazione di gravità. Trascurare la resistenza dell'aria.

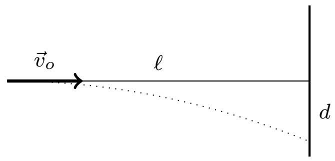


1-16 - Un aereo sta volando orizzontalmente ad una quota h con velocità costante $\vec{v}_a$; nell'istante in cui l'aereo passa dalla verticale rispetto ad un cannone situato al suolo, l'areo lascia cadere una bomba ed il cannone spara un proiettile con velocità iniziale $\vec{v}_o$ ($v_o > v_a$).
a) Calcolare, in funzione delle quantità date in precedenza, il valore dell'angolo θ necessario perchè il proiettile colpisca la bomba ed il tempo a cui avviene l'impatto.
b)Dimostrare che , affinchè l'impatto avvenga ad una quota maggiore di $\frac{h}{2}$, si deve avere: ${v_o}^2 \geq {v_a}^2 + gh$.
Trascurare la resistenza dell'aria.

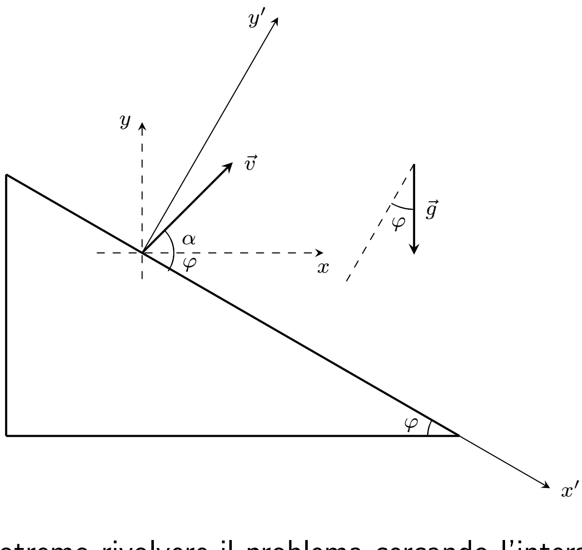


Scegliamo un sistema di riferimento con l'origine nella posizione iniziale del proiettile, l'asse x orizzontale e rivolto verso destra, l'asse y verticale e rivolto verso l'alto e fissiamo $t = 0$ all'istante del lancio.
a) Le coordinate della bomba e del proiettile in funzione del tempo (leggi orarie del moto) si scrivono:
$x_b(t) = v_a t \quad ; \quad y_b(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$
$x_p(t) = v_o \cos(\theta)t \quad ; \quad y_p(t) = v_o \sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$
affinchè i due ordigni si incontrino, le loro coordinate x ed y devono essere uguali in un istante da determinare. Abbiamo dunque due equazioni nelle incognite t e θ:
$v_a t = v_o \cos(\theta)t \quad ; \quad h = v_o \sin(\theta)t$
La prima equazione (escludendo il caso banale $t = 0$ e dividendo per t) permette di ricavare il valore di θ: $cos(\theta) = \frac{v_a}{v_o}$ (*)
la seconda equazione permette di ricavare il tempo dell'impatto:
$t = \frac{h}{v_o \sin(\theta)} =$ (dalla (*)) $= \frac{h}{\sqrt{{v_o}^2 - {v_a}^2}}$
b) Sostituendo quest'ultima espressione di t in quella di di y_b o di y_p si ottiene l'espressione della quota a cui avviene l'impatto:
$h_i = h\left(1 - \frac{1}{2}g\frac{h}{{v_o}^2 - {v_a}^2}\right)$
ed imponendo che h_i sia maggiore di $\frac{h}{2}$ si ricava la condizione cercata.

1-17 - Un proiettile viene sparato con velocità iniziale orizzontale e colpisce un bersaglio situato a distanza ℓ nella posizione indicata in figura. Calcolare, in funzione di g, ℓ, e d, il tempo dell'impatto e il modulo della velocità iniziale del proiettile.
Trascurare la resistenza dell'aria.



1-18 - Gittata massima lungo una collina
Una collina è inclinata di un angolo φ rispetto alla direzione orizzontale. Una palla viene lanciata dalla sua sommità con una velocità iniziale che forma un angolo α con l'orizzontale. Dimostrare che, a parità di modulo della velocità iniziale, l'angolo di gittata massima, misurata lungo la collina, è dato da $\alpha_{max} = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$.



Scegliamo il sistema di riferimento $x'y'$: con questa scelta potremo rivolvere il problema cercando l'intersezione con l'asse $y' = 0$, come nel caso della gittata su un piano orizzontale; la differenza sta nel fatto che in questo sistema $\vec{g}$ ha entrambe le componenti non nulle.
$\vec{v} = v\cos(\alpha + \varphi)\hat{x}' + v\sin(\alpha + \varphi)\hat{y}' \quad ; \quad \vec{g} = g\sin(\varphi)\hat{x}' - g\cos(\varphi)\hat{y}'$
Le leggi orarie del moto del pallone ($t = 0$ al momento del lancio):
$x'(t) = v\cos(\alpha + \varphi)t + \frac{1}{2}g\sin(\varphi)t^2 \quad ; \quad y'(t) = v\sin(\alpha + \varphi)t - \frac{1}{2}g\cos(\varphi)t^2$
Ora non conviene scrivere esplicitamente l'equazione della traiettoria, che è una parabola con l'asse obliquo rispetto agli assi coordinati. Procediamo in questo modo: imponendo $y'(t) = 0$ e risolvendo per t ricaviamo il tempo t_o a cui il pallone cade sulla collina; la soluzione $t = 0$ corrisponde al momento del lancio, l'altra soluzione è data da:

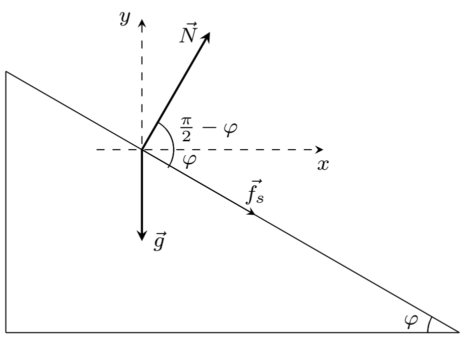
$t_o = \frac{2v\sin(\alpha+\varphi)}{g\cos(\varphi)}$ sostituendo questa espressione in $x'(t)$ otteniamo la coordinata x' del punto d'impatto, cioè la gittata, che indichiamo con d:
$d = v\cos(\alpha+\varphi)\frac{2v\sin(\alpha+\varphi)}{g\cos(\varphi)} + \frac{1}{2}g\sin(\varphi)\frac{4v^2\sin^2(\alpha+\varphi)}{g^2\cos^2(\varphi)} = \frac{2v^2\sin(\alpha+\varphi)}{g\cos(\varphi)}\left[\cos(\alpha+\varphi) + \frac{\sin(\varphi)\sin(\alpha+\varphi)}{\cos(\varphi)}\right] = \frac{2v^2\sin(\alpha+\varphi)\cos(\alpha)}{g\cos^2(\varphi)}$
L'epressione della gittata è dunque abbastanza semplice e potete verificare che per $\varphi = 0$ si riduce a quella che abbiamo ricavato nel caso di gittata su un piano orizzontale . Dobbiamo ora cercare il valore di α per cui si ha il massimo di d; deriviamo quindi rispetto ad α:
$d' = \frac{2v^2}{g\cos^2(\varphi)}[\cos(\alpha+\varphi)\cos(\alpha) - \sin(\alpha+\varphi)\sin(\alpha)] = \frac{2v^2}{g\cos^2(\varphi)}\cos(2\alpha+\varphi)$
d' si annulla per $2\alpha+\varphi = \frac{\pi}{2}$, otteniamo dunque α_{max} dato nel testo.
Dovremmo ancora verificare che si tratta effettivamente di un massimo, ma questo possiamo farlo ragionando su cosa succede quando α aumenta o diminuisce rispetto ad α_{max}, oppure considerare l'analogia col caso di gittata in un piano.

Se in alternativa vogliamo lavorare nel sistema xy dovremo scrivere l'equazione della traiettoria della palla che già conosciamo (la palla parte dall'origine):
$y = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}x - \frac{1}{2}g\frac{1}{v^2\cos^2\alpha}x^2$
e studiarne l'intersezione con la retta inclinata come la collina. Conviene scrivere l'equazione di tale retta in forma parametrica (*):
$x = -d\cos\varphi$; $y = d\sin\varphi$
In queste equazioni il parametro d è la distanza dall'origine per i punti della retta nel secondo quadrante, mentre per i punti nel quarto quadrante tale distanza è $-d$; ricavando d otterremo dunque direttamente la gittata. Sostituendo queste due equazioni nella prima otteniamo:
$d\sin\varphi = -d\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos\varphi - \frac{1}{2}g\frac{1}{v^2\cos^2\alpha}d^2\cos^2\varphi$
Che risolta per d ci darà i punti di intersezione. Eliminando la soluzione $d = 0$ che corrisponde al punto di partenza e moltiplicando ambo i membri per $\cos^2\alpha$ otteniamo:
$\sin\varphi\cos^2\alpha + \sin\alpha\cos\varphi\cos\alpha = -\frac{1}{2}g\frac{1}{v^2}d\cos^2\varphi$
e con pochi altri passaggi riotteniamo la gittata calcolata prima, cambiata di segno perchè l'intersezione si trova nel quarto quadrante.

(*) $x = f(d)$ e $y = g(d)$ costituiscono le equazioni parametriche di una curva nel piano nel senso che, per d che varia in un certo intervallo (da $-\infty$ a $+\infty$ nel nostro caso), il punto di coordinate $f(d)$ e $g(d)$ descrive tutta la curva. Ad ogni valore di d corrisponde un punto della curva e viceversa.

1-19 - La pista di Nardò

Sia ρ il raggio di curvatura della curva di una strada orizzontale. Se μ_s è il coefficiente di attrito statico tra le ruote di un'automobile e la strada, dimostrare che la velocità massima (in modulo) alla quale l'automobile può viaggiare senza sbandare è data da $\sqrt{\mu_s g\rho}$.
Considerare poi il caso in cui la strada sia inclinata di un angolo φ trasversalmente alla direzione di marcia. Dimostrare che se l'automobile percorre la strada ad una velocità (in modulo) data da $\tan\varphi = \frac{v^2}{\rho g}$, allora le ruote non subiscono sollecitazioni trasversali alla direzione di marcia. Sulla base di queste considerazioni si costruiscono piste circolari ed inclinate trasversalmente per gare o per prove sui prototipi di automobile.



Se l'automobile percorre la strada a velocità di modulo costante v (moto circolare uniforme), l'accelerazione ha solo componente normale, diretta orizzontalmente verso l'interno della traiettoria e di modulo $\frac{v^2}{\rho}$. Tale accelerazione deve essere fornita dalla forza di attrito statico, che quindi agisce trasversalmente alle ruote, è diretta verso l'interno ed ha modulo (m è la massa dell'automobile):
$f_s = m\frac{v^2}{\rho} \leq \mu_s N = \mu_s mg$ da cui segue la diseguaglinza data nel testo.
Più interessante è il caso in cui la strada è inclinata. Se l'auto si mantiene alla stessa quota lungo la strada, la traiettoria è ancora una circonferenza orizzontale e quindi l'accelerazione normale dovrà essere ancora orizzontale e rivolta verso l'interno. In figura è rappresentata la sezione trasversale della strada e le forze che agiscono sull'automobile. L'accelerazione normale dovrà essere diretta lungo l'asse x. $\vec{f_s}$ è radente alla strada, ma il verso indicato in figura è la

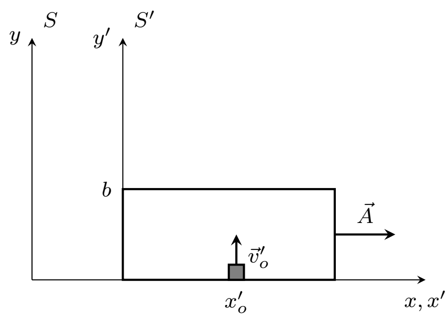
nostra ipotesi iniziale,ma potrebbe, come vedremo, essere anche quello opposto. In questo caso sia $\vec{f}_s$ che $\vec{N}$ hanno componenti lungo x e contribuiscono alla accelerazione normale.
In definitiva la seconda legge di Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ si scrive:
$\vec{N} + \vec{f}_s + m\vec{g} = m\vec{a} = m\vec{a}_N = m\frac{v^2}{\rho}\hat{u}_N = m\frac{v^2}{\rho}\hat{x}$
(Se il moto è circolare uniforme l'accelerazione ha solo componente normale e data la scelta del sistema di riferimento, $\hat{u}_N$ e $\hat{x}$ coincidono). Le componenti x e y di questa equazione vettoriale si scrivono:
$x : N\sin\varphi + f_s\cos\varphi = m\frac{v^2}{\rho}$
$y : N\cos\varphi - f_s\sin\varphi - mg = 0$
Lungo z le componenti delle forze, e quindi anche quella dell'accelerazione, sono nulle.
Questo sistema di equazioni in N ed f_s ci permette di ricavare la reazione normale e la forza d'attrito:
$N = mg\cos\varphi + m\frac{v^2}{\rho}\sin\varphi \quad ; \quad f_s = m\frac{v^2}{\rho}\cos\varphi - mg\sin\varphi$ (*)
Notate che il determinante dei coefficienti è 1 o −1 a seconda di come si dispongono le righe. Questo è dovuto al fatto che $\vec{N}$ e $\vec{f_s}$ sono perpendicolari tra loro.
f_s si annulla per $\tan\varphi = \frac{v^2}{\rho g}$; cioè, a φ fissato, esiste un valore di v, lo chiamiamo v_o, per cui la forza d'attrito statico trasversale è nulla, ossia l'automobile procede come se fosse su una pista rettilinea, e di fatto non c'è bisogno di sterzare. Quella longitudinale, lo vedremo più avanti, non è comunque nulla. In questo caso l'accelerazione normale è fornita dalla sola componente di $\vec{N}$ lungo x.
L'anello di prova di Nardò ha quattro piste con inclinazioni diverse, corrispondenti a quattro velocità da 100 a 240 kmh^{-1} e viene usato per provare le automobili in condizioni molto simili a quelle di un percorso rettileneo.
Per velocità maggiori di v_o f_s in (*) è positivo, quindi per mantenere l'auto sulla traiettoria è necessaria una forza d'attrito nel verso rappresentato in figura. Mentre, per velocità minori di v_o, f_s è negativo ed il verso è opposto a quello rappresentato in figura.

Si può ottenere lo stesso risultato (*) anche imponendo che la risultante delle forze lungo il piano inclinato sia nulla. Fatelo per esercizio.

1-20 - Trovare il raggio di curvatura del punto più alto della traiettoria di un pallone lanciato da terra con una velocità iniziale che forma una angolo α con l'orizzontale ed ha modulo v_0.

1-21 - La pioggia sta cadendo verticalmente rispetto alla terra con velocità costante $\vec{V}_p$. Da un'automobile che si muove con velocità costante $\vec{V}_a$ la osserviamo cadere con un'inclinazione α rispetto alla verticale. Dimostrare che, conoscendo la velocità dell'automobile, possiamo calcolare quella della pioggia: $V_p = V_a\cot\alpha$.

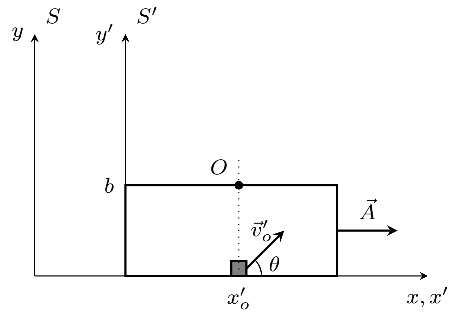
1-22a - I due sistemi di riferimento rappresentati in figura giacciono in un piano orizzontale; S è inerziale, mentre S' è solidale con un vagone ferroviario, in figura visto dall'alto, che si sta muovendo con accelerazione costante $\vec{A}$ rispetto ad S. Un blocchetto, assimilabile ad un punto materiale che scivola senza attrito sul pavimento del vagone, viene lanciato dalla posizione indicata in figura con la velocità iniziale $\vec{v}'_o$ orizzontale e perpendicolare all'asse x'.
a) Scrivere le leggi orarie del moto , x'(t) ed y'(t), e l'equazione cartesiana della traiettoria y'(x') del blocchetto;
b) calcolare la coordinata x' del punto in cui il blocchetto urta contro la parete opposta e il tempo a cui avviene l'impatto;
c) un osservatore nel sistema S che tipo di moto osserva ?



Nel sistema S, il blocchetto è soggetto solo alla forza peso ed alla reazione del pavimento del vagone; in assenza di attrito, tale reazione è normale ed equilibra la forza peso. L'accelerazione del blocchetto è dunque nulla. La relazione tra le accelerazioni nei due sistemi (trasformazioni di Galileo) è la seguente:
$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}' = -\vec{A}$
in S' il moto del blocchetto è dunque uniformemente accelerato con posizione iniziale $\vec{r}'_o = x'_o\hat{x}$, velocità iniziale $\vec{v}'_o = v'_o\hat{y}$ ed accelerazione $-\vec{A} = -A\hat{x}$.
a) Ponendo $t = 0$ al momento del lancio le coordinate del punto in funzione del tempo sono date da:
$x'(t) = x'_o - \frac{1}{2}At^2 \quad ; \quad y'(t) = v'_o t$
Queste due equazioni costituiscono l'equazione parametrica, con parametro t, della traiettoria; ricavando il parametro da una delle due e sostituendolo nell'altra otteniamo l'equazione cartesiana:
$x' = x'_o - \frac{1}{2}A\left(\frac{y'}{v'_o}\right)^2$ oppure $y' = v'_o\sqrt{\frac{2(x'_o - x')}{A}}$

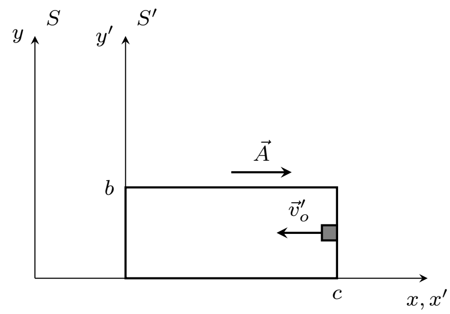
b) $x' = x'_o - \frac{1}{2}A\left(\frac{b}{v'_o}\right)^2$; $t = \frac{b}{v'_o}$
c) Nel sistema S l'accelerazione è nulla; il moto è dunque uniforme con velocità data da (trasformazioni di Galileo):
$\vec{v} = \vec{v}_T + \vec{v}'_o$
Dove $\vec{v}_T$ è la velocità del treno al momento del lancio. La posizione iniziale è la posizione del blocchetto al momento del lancio.

1-22b - I due sistemi di riferimento rappresentati in figura giacciono in un piano orizzontale; S è inerziale, mentre S' è solidale con un vagone ferroviario, in figura visto dall'alto, che si sta muovendo con accelerazione costante $\vec{A}$ rispetto ad S. Un blocchetto, assimilabile ad un punto materiale che scivola senza attrito sul pavimento del vagone, viene lanciato dalla posizione indicata in figura con la velocità iniziale $\vec{v}'_o$ (che giace nel piano $x'y'$).
Scrivere, in funzione di θ , A e b il valore del modulo di $\vec{v}'_o$ per il quale il blocchetto colpisce il punto O.

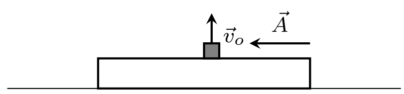


Il moto avviene in un piano orizzontale e la forza peso è equilibrata dalla reazione del piano, quindi l'accelerazione di gravità non interviene.
Nel sistema S' il moto è rettilineo uniforme lungo l'asse y' e uniformemente accelerato con accelerzione $-\vec{A}$ lungo x'.
Le componenti della velocità iniziale sono $v_o \cos\theta$ lungo x' e $v_o \sin\theta$ lungo y'. Le leggi orarie sono quindi date da:
$x'(t) = x'_o + v_o \cos\theta t - \frac{1}{2}At^2$; $y'(t) = v_o \sin\theta t$
Affinchè il blocchetto passi dal punto O dobbiamo imporre che:
$x'_o = x'_o + v_o \cos\theta t - \frac{1}{2}At^2$; $b = v_o \sin\theta t$
Ricavando t dalla prima equazione e sosituendo nella seconda si ottiene:
$v_o^2 = \frac{Ab}{\sin 2\theta}$
Notate l'analogia col problema della gittata.

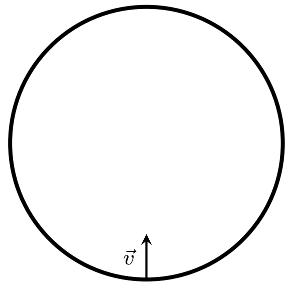
1-22c - I due sistemi di riferimento rappresentati in figura giacciono in un piano orizzontale; S è inerziale, mentre S' è solidale con un vagone ferroviario, in figura visto dall'alto, che si sta muovendo con accelerazione costante $\vec{A}$ rispetto ad S. Un blocchetto, assimilabile ad un punto materiale che scivola senza attrito sul pavimento del vagone, viene lanciato dalla posizione indicata in figura (a metà della parete) con velocità iniziale, rispetto ad S', $\vec{v}'_o$ orizzontale e parallela all'asse x'.
a) Scrivere le leggi orarie del moto , x'(t) ed y'(t), del blocchetto;
b) calcolare il tempo impiegato dal blocchetto per raggiungere la parete opposta;
c) un osservatore nel sistema S che tipo di moto osserva ?



1-23 - Un carrello ferroviario sta rallentando con accelerazione di modulo costante A. Un pallone viene lanciato verso l'alto dal carrello, con velocità di modulo v_o e verticalmente rispetto al pavimento del carrello. Calcolare la distanza dal punto di lancio alla quale il pallone ricade sul pavimento, ed indicare il verso, rispetto al punto di lancio, del punto di ricaduta.



1-24 - Considerare una pista circolare orizzontale di raggio R; un pattinatore inizialmente fermo in un punto della pista lancia un pallone imprimendogli la velocità $\vec{v}$ rappresentata in figura e contemporaneamente inizia a pattinare lungo la pista con accelerazione tangenziale di modulo costante a.
a) calcolare il valore di a affinchè il pattinatore possa riprendere il pallone;
b) calcolare il coefficiente di attrito statico tra la pista ed i pattini necessario affinchè il pattinatore non slitti trasversalmente lungo il percorso prima di riprendere il pallone.
Trascurare l'attrito tra il suolo ed il pallone e trattare il pattinatore come un punto materiale.



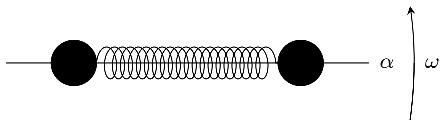
---

a) Ovviamente le traiettoria del pallone e quella del pattinatore si incontrano nel punto della pista diametralmente opposto al punto di lancio. Il pallone impiega un tempo $t_o = \frac{2R}{v}$ per raggiungere tale punto. Nello stesso tempo il pattinatore deve percorrere mezza pista. La sua accelerazione angolare è data $\alpha = \frac{a}{R}$ e nel tempo t_o deve aver percorso un angolo π. Quindi (cinematica del moto rotatorio):

$\frac{1}{2}\frac{a}{R}{t_o}^2 = \pi \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{1}{2}\pi\frac{v^2}{R}$.
Alternativamente potremmo considerare l'ascissa curvilinea percorsa nel tempo t_o , che è data da $\quad \frac{1}{2}a{t_o}^2 \quad$ e deve essere uguale a πR.
b) La forza d'attrito statico deve fornire in ogni punto del percorso del pattinatore l'accelerazione centripeta necessaria a mantenere la traiettoria circolare (indichiamo con w la velocità scalare del pattiinatore):
$\mu_s g = \frac{w^2}{R} \qquad \Rightarrow \qquad \mu_s = \frac{w^2}{gR}$
w è uguale ad at ed è massima nel punto in cui il pattinatore riprende il pallone; quindi il valore minimo richiesto è dato da: $\mu_s = \frac{(at_o)^2}{gR} = \frac{(\pi v)^2}{gR}$
Il pattinatore potrebbe anche percorrere n giri completi più mezzo giro prima di incontrare il pallone, quindi ad essere rigorosi la prima parte del problema ha infinite soluzioni; tuttavia all'aumentare di n aumenterebbe il valore di μ_s.

1-25 - Una molla (lunghezza di riposo ℓ_0, costante elastica k) è fissata ad un estremo e sospesa verticalmente. All'altro estremo è attaccato un corpo puntiforme di massa m. Calcolare la posizione di equilibrio del corpo, scrivere l'equazione del moto e calcolare il periodo delle oscillazioni.

1-26 - Nel sistema in figura le due sfere, che assimiliamo a due punti materiali entrambi di massa m, possono rere senza attrito lungo l'asse α e sono vincolate agli estremi di una molla di costante elastica κ e lunghezza di riposo ℓ_o. Il sistema sta ruotando con velocità angolare ω in un piano orizzontale attorno ad un asse passante per il centro di massa e le due sfere percorrono una traiettoria circolare di raggio R (possiamo pensare, ad esempio, che il sistema è appoggiato su un piano orizzontale privo di attrito e viene messo in rotazione).

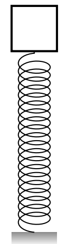


Calcolare R in funzione delle altre quantità definite in precedenza.

La molla si allunga rispetto alla sua lunghezza di riposo in modo da esercitare una forza di richiamo diretta verso il centro della traiettoria, che deve fornire l'accelerazione centripeta. Per calcolare l'allungamento della molla, scriviamo la legge di Newton lungo la direzione normale per una delle due sfere:
$\vec{F}_N = m\vec{a}_N = m\frac{v^2}{R}\vec{u}_N = m\omega^2 R\vec{u}_N \qquad$ (proprietà del moto curvilineo).
D'altra parte $\vec{F}_N$ è la forza esercitata dalla molla (la reazione normale del piano e la forza peso si equilibrano fra loro, e comunque hanno componente nulla lungo la normale), quindi: $\qquad \kappa(2R-\ell_o)\vec{u}_N = m\omega^2 R\vec{u}_N \qquad \Rightarrow R = \frac{\ell_o}{2-\frac{\omega^2 m}{\kappa}}$

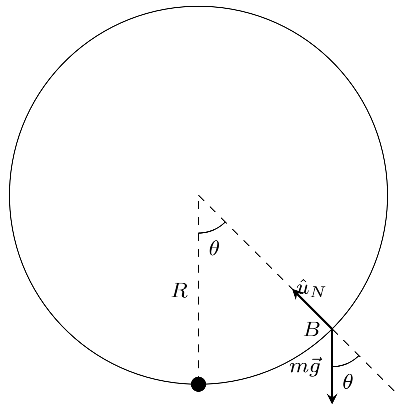
2-LAVORO ED ENERGIA

2-01 - Nel sistema in figura la molla è in posizione verticale ed ha costante elastica k e lunghezza di riposo ℓ_0; il cubo è appoggiato alla molla ed ha massa m. Inizialmente la molla è compressa fino ad una lunghezza $\frac{1}{2}\ell_0$, viene lasciata libera ed il cubetto si stacca dalla molla.
a) Calcolare l'altezza massima, rispetto al piano di sostegno, alla quale arriva il cubetto;
b) calcolare la velocità con la quale il blocchetto si stacca dalla molla.



a) Chiamiamo stato finale quello in cui il blocchetto raggiunge la quota massima. L'energia cinetica è nulla in entrambi gli stati iniziale e finale, e le forze a cui è soggetto il blocchetto sono conservative; la conservazione dell'energia meccanica si scrive quindi molto semplicemente (scegliendo il piano di sostegno come livello zero ed indicando con h la quota massima):
$mg\frac{\ell_0}{2} + \frac{1}{2}k\left(\ell_0 - \frac{\ell_0}{2}\right)^2 = mgh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\ell_0}{2} + \frac{1}{2}\frac{k}{mg}\frac{\ell_0^2}{4}$
b) La conservazione dell'energia tra lo stato iniziale e quello in cui il blocchetto si stacca dalla molla con velocità di modulo v permette di calcolare tale modulo:
$mg\frac{\ell_0}{2} + \frac{1}{2}k\left(\ell_0 - \frac{\ell_0}{2}\right)^2 = mg\ell_0 + \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{k}{m}\frac{\ell_0^2}{4} - g\ell_0}$
notiamo che l'argomento della radice (ad esempio per m sufficientemente grande) può essere negativo; cosa succede in questo caso ?

2-02 - Guida circolare con vincolo nei due versi
Considerare una guida circolare di raggio R, posta verticalmente; una perlina (o un anello) di massa m assimilabile ad un punto materiale può scorrere lungo la guida senza attrito.
Inizialmente la perlina si trova nella posizione indicata in figura e le viene impressa una velocità tangente alla guida e rivolta verso destra $\vec{v}_o$. Ricavare l'espressione della velocità della perlina lungo la guida, la posizione nella quale si ferma e il valore minimo del modulo di $\vec{v}_o$ affinché essa compia il giro completo della guida. Calcolare la reazione della guida in ogni punto della traiettoria.



Consideriamo una generica posizione B della perlina. Su di essa agiscono:
a) la forza peso, che è conservativa;
b) la reazione della guida, normale alla traiettoria e che dunque non compie lavoro; tale reazione ha la direzione del versore $\hat{u}_N$ e poichè la perlina è vincolata a scorrere lungo la guida essa si può esercitare, come vedremo, sia verso l'interno che verso l'esterno della traiettoria.
Poichè non vi è attrito, la guida non esercita una forza tangente alla traiettoria, che compirebbe lavoro.
In definitiva, le forze che agiscono sulla perlina sono conservative o non compiono lavoro, quindi possiamo applicare la conservazione dell'energia per calcolare la velocità della perlina nel punto generico B.
Scegliamo come livello zero dell'energia potenziale della forza peso la quota iniziale della perlina; la quota nella posizione B è data da: $h = R(1-\cos\theta)$
Notate i valori assunti da h al variare di θ: per $\theta = 0$ (posizione iniziale) si ha $h = 0$, per $\theta = \frac{\pi}{2}$ (raggio in posizione orizzontale) si ha $h = R$ e per $\theta = \pi$ (perlina nella sommità della guida) si ha $h = 2R$.
La conservazione dell'energia fra la posizione iniziale e la posizione B si scrive:
$\frac{1}{2}mv_o^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgR(1-\cos\theta)$
da cui si ricava il modulo della velocità in B: $\boxed{v_B = \sqrt{v_o^2 - 2gR(1-\cos\theta)}}$
Richiedendo che v_B sia nullo otteniamo l'angolo a cui la perlina si ferma per poi ridiscendere lungo la guida:
$\boxed{\cos\theta_{max} = 1 - \frac{v_o^2}{2gR}}$
e richiedendo che $\theta_{max} = \pi$ otteniamo il valore minimo di v_o affinchè la perlina compia un giro completo:
$\boxed{v_{omin} = \sqrt{4gR}}$
per $v_o = v_{omin}$ la perlina si arresterà alla sommità della guida, per valori maggiori proseguirà per compiere un giro completo e per valori minori si arresterà prima di raggiungere la sommità.
CALCOLO DELLA REAZIONE DELLA GUIDA

Per calcolare la reazione della guida consideriamo l'accelerazione normale nella generica posizione B per un moto circolare:
$\vec{a}_N = \frac{v_B^2}{R}\hat{u}_N$
tale accelerazione deve essere fornita dall componente normale delle forze agenti sulla guida; indicando con N la componente (non il modulo) della reazione della guida lungo la normale abbiamo: $N\hat{u}_N - mg\cos\theta\hat{u}_N = m\frac{v_B^2}{R}\hat{u}_N$ (notate il segno della componente della forza peso al variare di θ); quindi:
$N = mg\cos\theta + m\frac{v_B^2}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{N = m\frac{v_o^2}{R} + mg(3\cos\theta - 2)} \qquad (1)$
Consideriamo la prima espressione: per $\theta \leq \frac{\pi}{2}$ N è sicuramente positivo, per valori maggiori può diventare negativo, a seconda del valore di v_B^2.

Consideriamo ad esempio il caso in cui $v_o = v_{omin} = \sqrt{4gR}$: $\quad N = mg(3\cos\theta + 2)$.
In questo caso N si annulla per $\quad \cos\theta = -\frac{2}{3} \quad$, cioè per $\quad \theta_o = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) \quad$; per valori di θ minori di θ_o N è positivo, cioè $\vec{N}$ ha lo stesso verso di $\hat{u}_N$ (la guida 'tira' la perlina verso l'interno della traiettoria), per valori maggiori N ha verso opposto (la guida 'spinge' la perlina verso l'esterno). Per $\theta = \pi$ abbiamo $\quad N = -mg \quad$, cioè alla sommità della traiettoria, nella quale la perlina resta ferma, forza peso e reazione della guida si equilibrano.

2-03 - Guida circolare con vincolo in un solo verso

Considerare il sistema dell'esercizio precedente, con la perlina sostituita da un carrello che è solo appoggiato sulla guida, e se ne può quindi staccare. Calcolare v_{omin} affinchè il carrello percorra un giro completo e nel caso in cui non lo percorra analizzare in quali condizioni il carrello si stacca dalla guida.

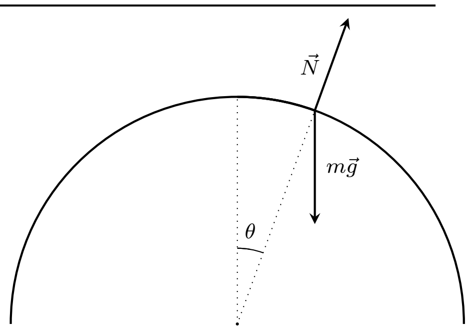
Finchè il carrello resta sulla guida, valgono tutte le equazioni dell'esercizio precedente, con in più la condizione che la reazione della guida può solo essere diretta verso l'interno della traiettoria e non verso l'esterno, cioè si deve avere $N \geq 0$. Per ricavare v_{omin} dobbiamo porre $\theta = \pi$ nella (1) e richiedere che N sia positivo:
$N = m\frac{v_o^2}{R} - 5mg \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{omin} = \sqrt{5gR}}$
Quindi in questo caso è richiesta una velocità iniziale maggiore, in modulo, che nel caso precedente, e questo è dovuto al fatto che la reazione della guida deve essere sempre rivolta verso l'interno.
Nel caso in cui il carrello non raggiunge la sommità della guida, dobbiamo assegnare un valore a v_o ed analizzare il segno di N dalla (1); fissiamo ad esempio $v_o = \sqrt{4gR}$, il valore ricavato nel caso precedente e non sufficiente in questo caso per il giro completo; abbiamo: $\quad N = mg(3\cos\theta + 2)$
N si annulla per lo stesso valore $\theta_o = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$ dell'esercizio precedente, è positivo per valori minori dell'angolo e negativo per valori maggiori; ma poichè la guida non può esercitare una reazione negativa, in θ_o il carrello si staccherà dalla guida e proseguirà in caduta libera.

2-04 - Pendolo con filo flessibile e pendolo con filo rigido

I due sistemi degli esercizi precedenti corrispondono esattamente ad un pendolo semplice con un filo flessibile (esercizio 03) e ad un pendolo cou un filo rigido (esercizio 02). Infatti un filo flessibile può esercitare una reazione in un solo verso, cioè verso l'interno della traiettoria, mentre un filo rigido può esercitare una reazione nei due versi: il filo flessibile può solo 'tirare', quello rigido può anche 'spingere'. Le equazioni scritte e le considerazioni fatte si applicano quindi anche ai due tipi di pendolo.

2-05 - Calotta sferica

Questo problema è lo speculare dello 03: la reazione si esercita solo verso l'esterno della traiettoria, invece che solo verso l'interno.
Un blocchetto è inizialmente in quiete sulla sommità di una calotta sferica (posizione di equilibrio instabile) ed inizia a scivolare con velocità iniziale nulla. Calcolare in quale posizione esso si stacca dalla calotta.



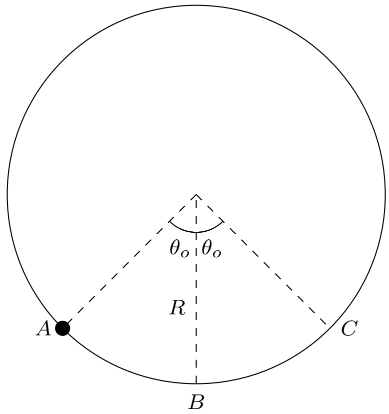
Scegliamo come variabile l'angolo θ in figura e lo zero dell'energia potenziale al livello della base della calotta; come negli esercizi precedenti, la conservazione dell'energia meccanica permette di calcolare il modulo v della velocità nella

posizione in figura (ci serve comunque v^2):
$v^2 = 2gR(1-\cos\theta)$
e la legge di Newton lungo la direzione normale si scrive (versore normale diretto sempre verso l'interno):
$-N + mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R} = 2mg(1-\cos\theta)$
N si annulla dunque per : $\quad \cos\theta = \frac{2}{3}$
Notiamo che abbiamo scelto un angolo diverso rispetto al problema 03, ma se consideriamo la posizione lungo la traiettoria nella quale gli oggetti si staccano, osserviamo che tale posizione è la stessa nei due casi; come mai ?

2-05a - Calotta sferica - Velocità iniziale non nulla
Rifare il calcolo dell'esercizio precedente ipotizzando una velocità iniziale del blocchetto non nulla e diretta orizzontalmente.

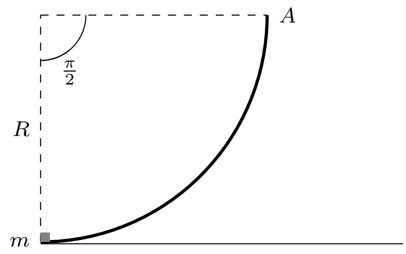
2-06 - Un pendolo semplice, costituito da un blocchetto di massa m assimilabile ad un punto materiale e da una fune inestensibile e di massa trascurabile di lunghezza l, parte da fermo da una posizione in cui la fune forma un angolo θ con la verticale. Calcolare, in funzione di m, l e dell'accelerazione di gravità:
a) il modulo della velocità del blocchetto nell'istante in cui la fune si trova in posizione verticale;
b) la tensione esercitata dalla fune nello stesso istante.

2-06a - Considerare una guida circolare di raggio R, posta verticalmente; una perlina di massa m assimilabile ad un punto materiale può scorrere lungo la guida senza attrito. Inizialmente la perlina si trova nella posizione A con velocità nulla; calcolare, in funzione di m, R e θ_o:
1) la velocità angolare e la reazione del filo in B;
2) la velocità angolare e la reazione del filo in C.
($\theta_o < \frac{\pi}{2}$)

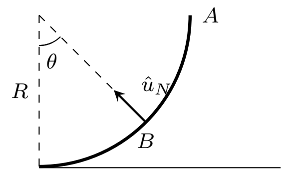


Sulla perlina agiscono:
a) la forza peso, che è conservativa;
b) la reazione della guida, normale alla traiettoria e che dunque non compie lavoro.
Poichè non vi è attrito, la guida non esercita una forza tangente alla traiettoria, che compirebbe lavoro.
In definitiva, le forze che agiscono sulla perlina sono conservative o non compiono lavoro, quindi possiamo applicare la conservazione dell'energia per calcolare la velocità della perlina in qualunque punto della traiettoria.
Scegliamo come livello zero dell'energia potenziale della forza peso la quota del punto B; la quota dei punti A e C rispetto al livello zero è data da: $\quad h = R(1-\cos\theta_o) \quad$; poichè la perlina parte da A con velocità nulla, la conservazione dell'energia meccanica tra i punti A e B si scrive:
$mgR(1-\cos\theta_o) = \frac{1}{2}mv_B^2$
da questa uguaglianza si ricava v_B; dato il modulo della velocità in B, si può calcolare la velocià angolare:
$\omega = \pm\frac{v_B}{R} = \pm\frac{1}{R}\sqrt{2gR(1-\cos\theta_o)}$
i due segni corrispondono ai passaggi da A a B e da C a B.
Per il calcolo delle reazioni, fare riferimento all'esercizio sulla guida circolare nella raccolta di esercizi; considerando che in C la velocità è nulla si ottiene:
in B: $\quad N = mg + m\frac{v_B^2}{R}$
in C: $\quad N = mg\cos\theta_o$
In entrambi i casi ($\theta_o < \frac{\pi}{2}$) la reazione è rivolta verso l'interno della traiettoria e i valori di N sono i moduli di tale reazione.

2-07 - La guida rappresentata in figura ha la forma di un arco di circonferenza di raggio R; su di essa può scorrere senza attrito un blocchetto di massa m, che assimiliamo ad un punto materiale. Al blocchetto, nella posizione iniziale indicata in figura, viene impressa una velocità iniziale orizzontale di modulo v_o .
a) calcolare il valore minimo di v_o per il quale il blocchetto raggiunge il punto A;
b) calcolare la quota massima raggiunta dal blocchetto;
c) calcolare la reazione esercitata dalla guida sul blocchetto in un punto generico della traiettoria.

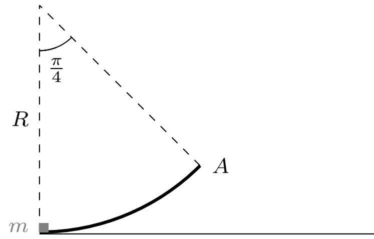


b) Scegliendo lo zero dell'energia potenziale della forza peso al livello della posizione iniziale del blocchetto ed indicando con h la quota massima raggiunta dal blocchetto, la conservazione dell'energia meccanica tra la posizione iniziale e quella di quota massima si scrive: $\frac{1}{2}mv_o^2 = mgh$ (nella posizione iniziale l'energia è solo cinetica, in quello finale solo potenziale); da questa relazione si ricava h. L'espressione ricavata vale sia nel caso che il blocchetto si fermi lungo la guida sia nel caso che si stacchi in A. Infatti dopo che si sarà staccato in A, la velocità avrà solo componente verticale e quindi nel punto di quota massima sarà nulla.
a) ponendo $h = R$ nell'espressione scritta in b) si ottiene il valore minimo richiesto;
c) Dato l'angolo θ in figura, la conservazione dell'energia ci permette di calcolare il modulo della velocità quando il blocchetto si trova nella posizione B:

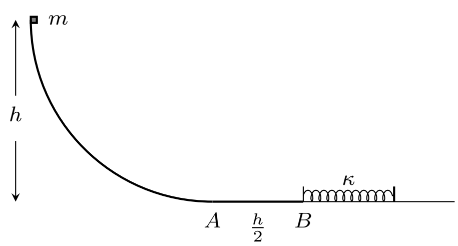


$v^2 = v_o^2 - 2gR(1 - \cos\theta)$
Detta $\vec{N} = N\hat{u}_N$ la reazione esercitata dalla guida nella direzione normale alla traiettoria, lungo tale direzione l'accelerazione è data da:
$N\hat{u}_N - mg\cos\theta\hat{u}_N = m\frac{v^2}{R}\hat{u}_N \quad \Rightarrow \quad N = m\frac{v^2}{R} + mg\cos\theta$
Notate che N è sicuramente positivo per $\theta < \frac{\pi}{2}$. Si può annullare solo in A, se ci arriva con velocità nulla.

2-08 - La guida rappresentata in figura ha la forma di un arco di circonferenza di raggio R; su di essa può scorrere senza attrito un blocchetto di massa m, che assimiliamo ad un punto materiale. Al blocchetto, nella posizione iniziale indicata in figura, viene impressa una velocità iniziale orizzontale di modulo v_o .
Calcolare il valore minimo di v_o per cui il blocchetto raggiunge il punto A e nel caso in cui lo superi calcolare la quota massima raggiunta rispetto al punto di partenza.



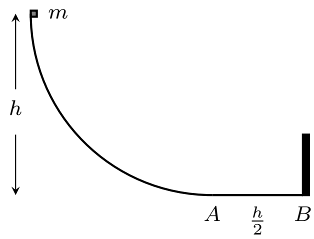
2-09 - Un blocchetto di massa m, assimilabile ad un punto materiale, parte da fermo da una quota h e scivola senza attrito lungo una guida circolare. Al termine della guida si trova un tratto orizzontale AB di lunghezza $\frac{h}{2}$; il coefficiente d'attrito dinamico tra il blocchetto ed il tratto orizzontale è $\mu_d = 0.75$. In B si trova l'estremo libero di una molla ideale di costante elastica κ. Il blocchetto impatta su tale estremo, comprime la molla e viene rilanciato nella direzione opposta.
a) Calcolare la quota massima h_f che il blocchetto raggiunge lungo la guida circolare dopo l'impatto con la molla;
b) Calcolare la compressione massima della molla.
Trascurare l'attrito nelle fasi di compressione ed allungamento della molla.



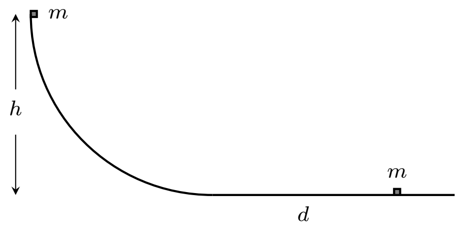
a) Energia cinetica in A al primo passaggio (conservazione dell'energia): $E_{k_A} = mgh$
Energia cinetica in B al primo passaggio (lavoro compiuto dalla forza d'attrito):
$E_{k_B} = E_{k_A} - \mu_d N\frac{h}{2} = E_{k_A} - \mu_d mg\frac{h}{2}$
($N = mg$ è il modulo della reazione normale del piano).
Energia cinetica in B dopo che il blocchetto è stato rilanciato nella direzione opposta (conservazione dell'energia) :
$E'_{k_B} = E_{k_B}$
Energia cinetica in A al secondo passaggio :
$E'_{k_A} = E'_{k_B} - \mu_d mg\frac{h}{2} = E_{k_A} - \mu_d mgh = mgh - 0.75mgh = \frac{1}{4}mgh$
Quindi (conservazione dell'energia) : $h_f = \frac{h}{4}$
b) Applichiamo la conservazione dell'energia. L'energia potenziale della forza peso resta costante e quindi non la consideriamo. Al momento dell'impatto l'energia del blocchetto è E_{k_B}; nella posizione di massima compressione l'energia cinetica è nulla e quella potenziale, indicando con ℓ la massima compressione della molla, è data da $\frac{1}{2}\kappa\ell^2$.
Quindi:

$\ell = \sqrt{\frac{2E_{k_B}}{\kappa}} = \sqrt{\frac{1.25mgh}{\kappa}}$

2-10 - Un blocchetto di massa m, assimilabile ad un punto materiale, parte da fermo da una quota h e scivola senza attrito lungo una guida circolare; al termine della guida si trova un tratto orizzontale di lunghezza $\frac{h}{2}$ ed alla fine del tratto orizzontale una parete verticale; il coefficiente d'attrito dinamico tra il blocchetto ed il tratto orizzontale è $\mu_d = 0.5$.
a) Nell'ipotesi che l'urto tra la parete ed il blocchetto sia elastico, calcolare la quota massima h_f che il blocchetto raggiunge lungo la guida circolare dopo l'urto;
b) nell'ipotesi che l'urto sia invece parzialmente anelastico, ed indicando con $h'_f < h_f$ la quota massima finale, calcolare la perdita di energia cinetica durante l'urto.

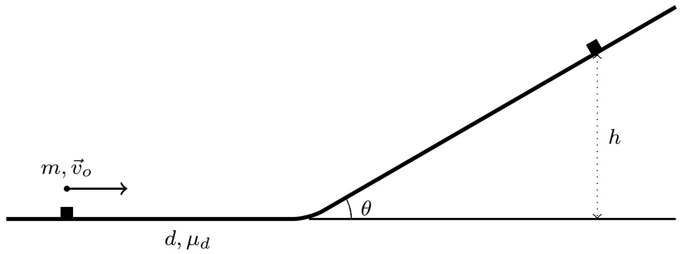


2-11 - Un blocchetto di massa m, assimilabile ad un punto materiale, parte da fermo da una quota h e scivola senza attrito lungo una guida circolare; al termine della guida si trova un tratto orizzontale lungo il quale il blocchetto si ferma dopo aver percorso una distanza d. Determinare il coefficiente di attrito dinamico tra il blocchetto e il tratto orizzontale in funzione delle quantità indicate in precedenza.

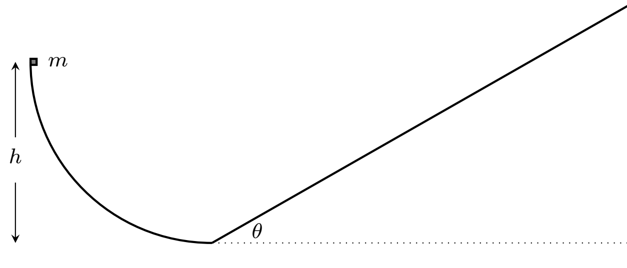


$\mu = \frac{h}{d}$

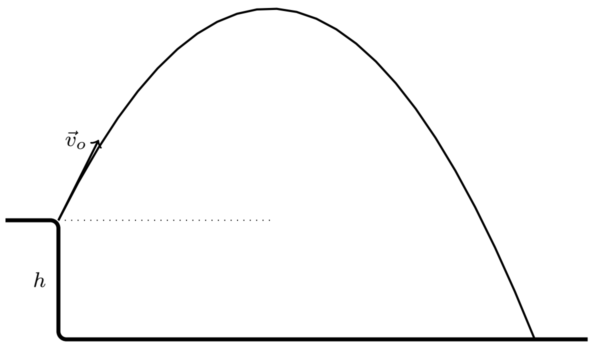
2-12 - Un blocchetto di massa m, che assimiliamo ad un punto materiale, inizia a muoversi con velocità $\vec{v}_o$, percorre un tratto orizzontale di lunghezza d e successivamente risale lungo un piano inclinato e si ferma. Il coefficiente di attrito dinamico tra il blocchetto e la superficie di appoggio è μ_d (sia nel tratto orizzontale che in quello inclinato). Nel momento in cui il blocchetto si ferma il suo centro di massa si è sollevato rispetto alla quota iniziale della quantità h indicata in figura.
a) calcolare h in funzione delle altre quantità indicate figura;
b)calcolare il minimo valore del coefficiente di attrito statico.



2-13 - Un blocchetto di massa m, assimilabile ad un punto materiale, parte da fermo da una quota h e scivola senza attrito lungo una guida circolare; al termine della guida si trova un piano inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale.
a) Nel caso in cui il blocchetto si muova senza attrito anche lungo il piano, calcolare la distanza precorsa lungo tale piano prima di fermarsi;
b)calcolare la stessa distanza nel caso in cui il coefficiente d'attrito dinamico tra il piano ed il blocchetto sia μ_d.



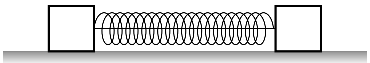
2-14 - Un pallone viene lanciato dalla sommità di un edificio, come rappresentato in figura. Calcolare il modulo della velocità al momento dell'impatto col suolo, in funzione delle quantità indicate in figura. Trascurare la resistenza dell'aria.



Il pallone è soggetto alla forza peso, conservativa. Possiamo applicare la conservazione dell'energia meccanica; indicando con v_s il modulo richiesto (zero al livello del suolo):
$\frac{1}{2}mv_o^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_s^2 \quad \Rightarrow v_s = \sqrt{v_o^2 + 2gh}$

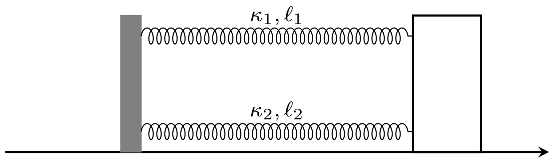
3-DINAMICA DEI SISTEMI .

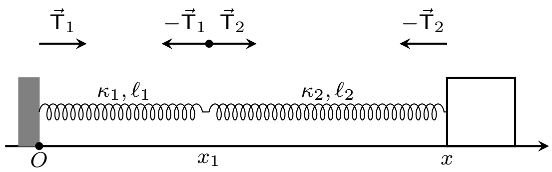
3-01 - Nel sistema in figura la molla ha costante elastica k e lunghezza di riposo ℓ_0 , i due cubi hanno massa m_1 ed m_2 ed il piano è liscio. Inizialmente un filo trattiene compressa la molla ad una lunghezza ℓ. Il filo si rompe ed i due cubi si staccano dalla molla. Calcolare la velocità dei due cubi.



3-02 - Il sistema dell'esercizio precedente si trova, al momento della rottura del filo, alla quota h con velocità nulla. Studiare il moto dei due cubi e del centro di massa.

3-03 - È abbastanza evidente che due molle di costanti elastiche κ_1 e κ_2 e uguali lunghezze di riposo ℓ messe in parallelo sono equivalenti ad un'unica molla di costante elastica $\kappa_1 + \kappa_2$ e lunghezza di riposo ℓ:
$F = F_1 + F_2 = -\kappa_1(x - \ell) - \kappa_2(x - \ell) = ...$
Nel caso generale, dimostrare che due molle di costanti κ_1, ℓ_1 e κ_2, ℓ_2 e di masse trascurabili rispetto a quella del blocchetto al quale sono collegate equivalgono ad un'unica molla di costanti κ, ℓ date da:
$\kappa = \kappa_1 + \kappa_2 \quad ; \quad \ell = \frac{\kappa_1\ell_1+\kappa_2\ell_2}{\kappa_1+\kappa_2}$ nel caso del parallelo
$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \quad ; \quad \ell = \ell_1 + \ell_2$ nel caso della serie

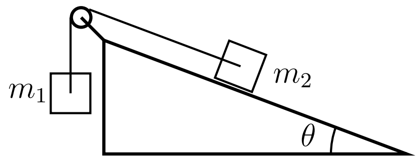




Per la serie

Allunghiamo o comprimiamo le molle esercitando una forza sul blocchetto; nella figura sono indicate le forze che le molle esercitano ai loro estremi nel caso dell'allungamento. la forza $-\vec{T}_2$ è quella esercitata sul blocchetto, quindi è la forza che il sistema delle due molle esercita su di esso. Per il terzo principio della dinamica i moduli delle forze applicate in x_1 devono essere uguali (se preferite potete vedere questa condizione come quella di equilibrio del punto di contatto).
La lunghezza delle due molle è data da x_1 e $x-x_1$ rispettivamente; quindi i moduli, sempre nel caso di molle allungate, sono dati da:
$T_1 = \kappa_1(x_1 - \ell_1) \quad ; \quad T_2 = \kappa_2(x - x_1 - \ell_2)$
Ricaviamo ora x_1 dall'uguaglianza dei due moduli, lo sostituiamo nell'espressione di T_2 e con un po' di algebra otteniamo:
$T_2 = \frac{\kappa_1\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2}(x - \ell_1 - \ell_2)$

3-04 - Il sistema rappresentato in figura è in equilibrio e sono trascurabili gli attriti e le masse della carrucola e della fune; inoltre la fune è inestensibile.
a) Calcolare l'espressione di θ in funzione di m_1, m_2 e dell'accelerazione di gravità.
b) Calcolare il valore numerico di θ nel caso $m_1 = 0.5 \cdot m_2$.
c) Cosa succede al sistema se si imprime ad m_1 una velocità iniziale v_0 lungo la verticale ?

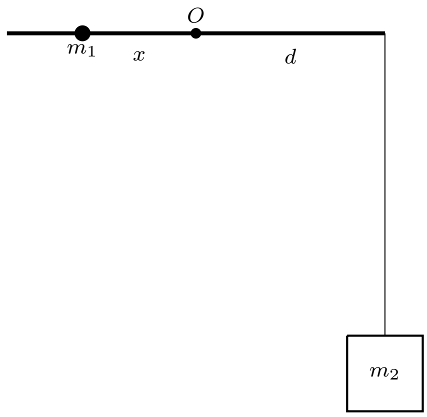


Introducendo un asse x parallelo al piano inclinato e diretto verso il basso ed indicando con T il modulo della tensione esercitata dalla fune, la componente x della risultante delle forze agenti su m_2 si scrive $-T + m_2 \cdot g \cdot sin(\theta)$, mentre lungo l'asse y la forza esercitata dal piano e la componente della forza peso si equilibrano. Per il corpo di massa m_1 conviene invece utilizzare un asse verticale diretto ad esempio verso l'alto, lungo il quale la risultante delle forze è data da $T - m_1 \cdot g$. Notiamo che i moduli della tensione esercitata ai due capi dalla fune sono uguali perchè la fune è inenstensibile e di massa trascurabile. La condizione di equilibrio di entrambi i corpi è dunque data dal sistema di equazioni :

$$-T + m_2 \cdot g \cdot sin(\theta) = 0$$
$$T - m_1 \cdot g = 0$$

Ricavando T dalla seconda e sostituendolo nella prima ricaviamo l'espressione di $sin(\theta)$: $\quad sin(\theta) = \frac{m_1}{m_2}$

Notiamo che tale espressione non dipende da g e che si può avere l'equilibrio solo se $m_1 \leq m_2$.
Questo è un caso di equilibrio indifferente, cioè la risultante delle forze è nulla per qualunque posizione dei due corpi, purchè la fune rimanga tesa. Per questa ragione, se imprimiamo ad m_1 una velocità iniziale, esso continuerà a muoversi con la stessa velocità, e conseguentemente anche m_2 si muoverà con velocità costante.

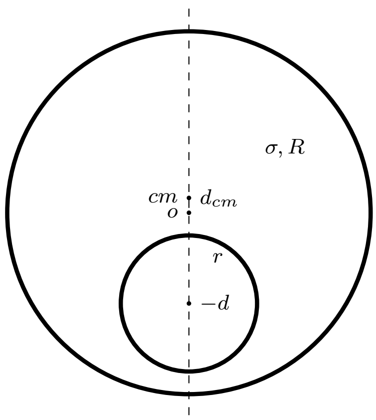


3-05 - Nel sistema in figura l'asta è di massa trascurabile rispetto ad m_1 ed m_2 e può ruotare in un piano verticale attorno ad un asse passante per il suo centro O. Il filo che regge la massa m_2 è anch'esso di massa trascurabile.
a) Calcolare, in funzione delle altre quantità indicate in figura, la distanza x di m_1 da O per la quale il sistema è in equilibrio nella posizione indicata in figura.
b) Stabilire il tipo di equilibrio.

a) Le forze esterne agenti sul sistema asta-masse sono la forza peso e la reazione dell'asse, applicata in O. Un sistema è in equilibrio quando la risultante delle forze esterne è nulla e la somma dei momenti delle forze esterne, calcolati rispetto ad un punto qualsiasi, è nulla anch'essa.
La prima condizione ci da' il valore della reazione; se scegliamo come polo il punto O la seconda condizione si scrive:
$m_1 x = m_2 d$ (*)
dalla quale si ricava x. Notate che il sistema costituisce una bilancia: noti x e d, è possibile confrontare la massa ignota m_2 con quella nota m_1; in una bilancia si fa scorrere m_1 lungo l'asta fino ad ottenere l'equilibrio.
2) Rifate la figura con l'asta ruotata di un angolo θ rispetto all'orizzontale. La componente della somma dei momenti lungo l'asse perpendicolare al piano della figura si scrive:
$(m_1 x - m_2 d) \cos\theta$
(o la stessa espressione col segno opposto, a seconda del verso dell'asse).
Vediamo che tale espressione si annulla nella stessa condizione (*) per qualunque valore di θ. il sistema rimane dunque in equilibrio per qualunque valore di θ: l'equilibrio è di tipo indifferente.
Provate ad ottenere lo stesso risultato studiando l'andamento dell'energia potenziale in funzione di θ.

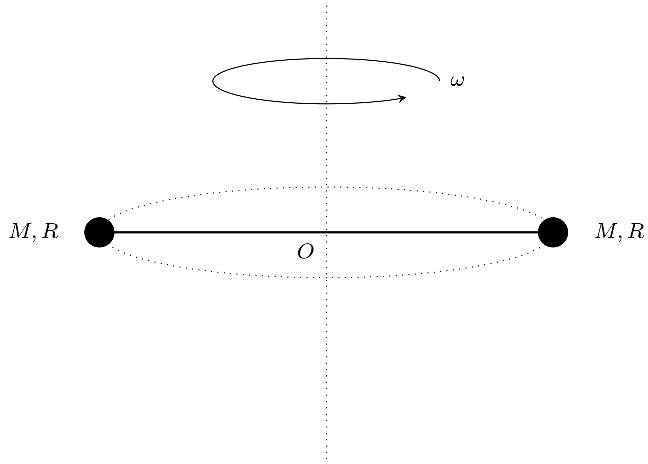
3-06 - La figura rappresenta un disco omogeneo forato. Dimostrare che la posizione del centro di massa è data da:

$$d_{cm} = \frac{r^2}{R^2 - r^2} d$$



La retta congiungente i due centri è l'unico asse di simmetria del sistema ed il centro di massa si deve trovare su tale asse. Per calcolare la sua posizione d_{cm} rispetto al centro del disco forato, piuttosto che impostare un integrale, ragionate su come si calcola la posizione del centro di massa di un sistema composto da più parti a partire da quella del centro di massa delle parti. Arriverete ad una equazione algebrica per d_{cm}.

3-07 - Effetto Ballerina



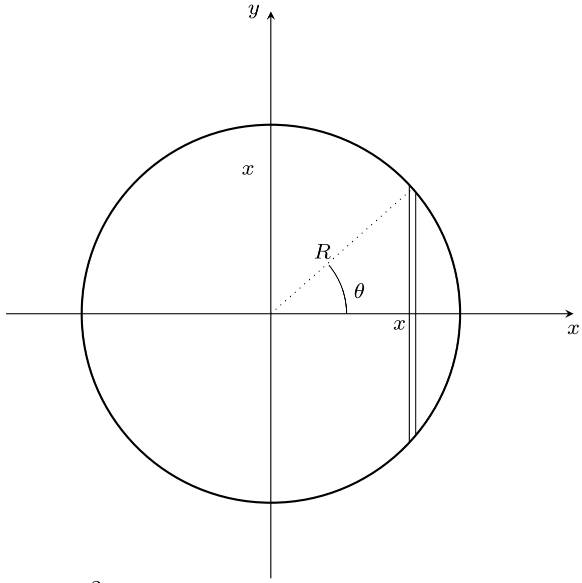
Il sistema in figura è costituito da due palline fissate su un'asta di massa trascurabile. Esso ruota senza attrito in un piano orizzontale attorno all'asse tratteggiato, con velocità angolare ω. Mentre il sistema ruota, le due palline vengono avvicinate all'asse (per esempio mediante un filo che le unisce e che si avvolge sull'asse) fino ad una distanza r. Calcolare la velocità angolare nello stato finale.

Il nostro sistema è costituito dall'asta e dalle due palline.
[Calcolate preliminarmente la quantità di moto e l'energia cinetica del sistema]
Sul sistema agiscono le seguenti forze esterne : forza peso sulle due palline e reazione dell'asse di rotazione. Le forze che l'asta esercita sulle palline e quelle che le palline esercitano sull'asta sono invece forze interne. Nella fase di avvicinamento all'asta abbiamo anche le forze interne tra filo e palline. Per studiare il moto del sistema dobbiamo usare le due equazioni cardinali della dinamica dei sistemi (m è la massa totale del sistema):
$m\vec{a}_{cm} = \vec{F}_{ext} \quad ; \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = -m\vec{v}_p \times \vec{v}_{cm} + \vec{\tau}_{ext}$
La prima ci dice che l'accelerazione del centro di massa è determinata dalla risultante delle forze esterne; nel nostro caso il centro di massa si trova evidentemente nel punto O e la reazione dell'asse lo mantiene in quella posizione, anche durante la fase di avvicinamento. La risultante delle forze esterne deve essere dunque nulla; quindi la reazione deve essere data da: $\vec{N} = -2M\vec{g}$.
Per esplicitare la seconda equazione cardinale dobbiamo innanzitutto scegliere il punto p rispetto al quale calcolare il momento angolare e i momenti delle forze esterne; scegliamo innanzitutto un punto fisso ($\vec{v}_p = 0$). Se in più lo scegliamo in O avremo che la somma dei momenti delle forze esterne è nullo; infatti il momento di $\vec{N}$ è nullo perchè tale forza è applicata proprio in O; quello della forza peso applicata sulla pallina di sinistra è perpendicolare al piano della figura, uscente da esso ed ha modulo MgR; quello della forza peso sulla pallina di destra è invece entrante ed ha lo stesso modulo. Quindi:
$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{ext} = 0$
Quindi $\vec{L}$ è costante e lo resta anche durante la fase di avvicinamento, perchè le considerazioni fatte prima valgono per qualunque distanza delle palline dall'asse (purchè restino uguali fra loro istante per istante). Quindi $\vec{L}$ è una quantità conservata.
Quanto vale $\vec{L}$ nello stato iniziale ? La velocità delle due palline ha modulo ωR; quella della pallina di sinistra è perpendicolare ed uscente dal foglio, quella della pallina di sinistra è entrante. In entrambi i casi $\vec{L}$ è parallelo all'asse di rotazione e diretto verso l'alto. Il suo modulo (somma dei due contributi) vale $L = 2\omega R^2$.
Nello stato finale avremo: $L' = 2\omega' r^2$.
La conservazione del momento angolare ci permette di uguagliare le due espressioni e di ricavare la velocità angolare nello stato finale: $\boxed{\omega' = \omega \left(\frac{R}{r}\right)^2}$.
In conclusione se le palline si avvicinano la velocità angolare aumenta; è un effetto che viene utilizzato dai danzatori: se mentre sono in rotazione avvicinano parti del corpo all'asse di rotazione, la velocità di rotazione aumenta.
OSSERVAZIONI
L'asse di rotazione serve solo per contrastare la forza peso: se il sistema fosse messo in rotazione in assenza di gravità, continuerebbe a ruotare con velocità costante.
La trattazione fatta è particolarmente semplice perchè il sistema è simmetrico rispetto all'asse di rotazione; provate a rifare i passaggi per masse o distanze diverse fra loro e nel caso in cui l'asta non sia orizzontale.
[Ricalcolate quantità di moto ed energia cinetica nello stato finale].

3-08 - Perchè tutti gli elicotteri hanno due eliche ?

3-09 - Disco: momento d'inerzia rispetto ad un asse passante per un suo diametro.

Vogliamo calcolare il momento d'inerzia di un disco omogeneo di raggio R rispetto all'asse y in figura. Conviene considerare il disco suddiviso in tante strisce come quella rappresentata in figura e sommare i loro momenti d'inerzia; nel limite in cui la larghezza delle strisce tende a zero, la sommatoria tenderà ad un integrale. Tutti i punti della striscia avranno (nel limite) la stessa ascissa x e la stessa distanza dall'asse y. Il quadrato della distanza dei punti della striscia dall'asse y è x^2. Il contributo della striscia al momento d'inerzia è dunque:



$x^2 dm = x^2 \ \times densita' \ superficiale \times \ superficie \ della \ striscia \ = x^2 \times \sigma \times 2R\sin\theta dx$

Quindi:

$I = \int_{-R}^{R} 2R\sigma x^2 \sin\theta \, dx$

Per calcolare l'integrale eseguiamo un cambiamento di variabile:

$x = R\cos\theta \quad \Rightarrow \quad dx = -R\sin\theta d\theta$

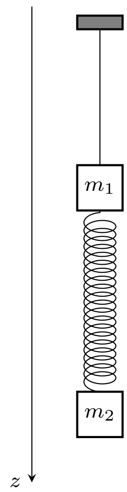
$I = \int_0^\pi 2\sigma R^4 \sin^2\theta\cos^2\theta \, d\theta = 2\sigma R^4 \int_0^\pi \sin^2\theta\cos^2\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\sigma R^4 \int_0^\pi \sin^2(2\theta)\, d\theta = \frac{1}{4}\sigma\pi R^4 = \frac{1}{4}MR^2$

Notiamo che il valore è inferiore a quello del momento d'inerzia rispetto ad un asse passante per il centro e perpendicolare alla superficie del disco; in questo caso, infatti, la massa del disco è distribuita più vicino all'asse.

Utilizzando la stessa procedura, calcolate la superficie del cerchio.

Rifate ,da soli, il calcolo del momento d'inerzia rispetto all'asse z del sistema in figura.

3-10 - Un calcolo di moto relativo



Nel sistema in figura il filo trattiene la massa m_1 e la molla trattiene la massa m_2. Vogliamo studiare il moto del sistema quando il filo viene tagliato.

Innanzitutto stabiliamo le condizioni iniziali: poniamo lo zero dell'asse z nella posizione di m_1, quindi:

$z_{1o} = 0 \quad ; \quad v_{1o} = 0$

Mentre la condizione di equilibrio della seconda massa (indicando con κ e ℓ_o la costante elastica e la lunghezza di riposo della molla) da' le sue condizioni iniziali :

$z_{2o} = \ell_o + \frac{m_2 g}{\kappa} \quad ; \quad v_{2o} = 0$

Il sistema è composto dalle due masse e dalla molla. Se tale molla è di massa trascurabile, la sua funzione è solo quella di esercitare due forze ai suoi estremi, sulle masse; queste sono forze interne, quindi opposte tra loro. Le forze esterne sono le forze peso applicate alle due masse. Secondo la prima equazione della dinamica dei sistemi, il centro di massa si muove come una particella puntiforme di massa $m_1 + m_2$ soggetta alla forza di gravità, cioè la sua accelerazione deve essere g. Il moto delle due masse relativamente al centro di massa o relativamente fra loro sarà determinato dalle forze interne e da quelle esterne. Traduciamo tutto questo in equazioni:

Equazioni del moto delle due masse:

$m_1\ddot{z}_1 = \kappa(z_2 - z_1 - \ell_o) + m_1 g \quad ; \quad m_2\ddot{z}_2 = -\kappa(z_2 - z_1 - \ell_o) + m_2 g$

Convincetevi della correttezza dei segni tenendo conto della scelta dell'asse e del fatto che $z_2 - z_1$ è positivo e da' istante per istante la lunghezza della molla. Sommiamo le due equazioni:

$m_1\ddot{z}_1 + m_2\ddot{z}_2 = (m_1 + m_2)g \quad \Rightarrow \quad \ddot{z}_{cm} = g \quad \Rightarrow \quad z_{cm} = z_{cmo} + \frac{1}{2}gt^2 \quad$ (*)

Ora sottraiamole: $\ddot{z}_2 - \ddot{z}_1 = -\kappa\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)(z_2 - z_1 - \ell_o)$

Possiamo vedere che l'equazione del moto per la variabile $z_2 - z_1$ (posizione relativa) è uguale a quella di un oscillatore armonico di costanti κ , ℓ_o e massa uguale alla massa ridotta del sistema. La soluzione generale è data da:

$z_2 - z_1 = \ell_o + A\cos(\omega t + \phi) \quad ; \quad \omega = \sqrt{\kappa\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}$

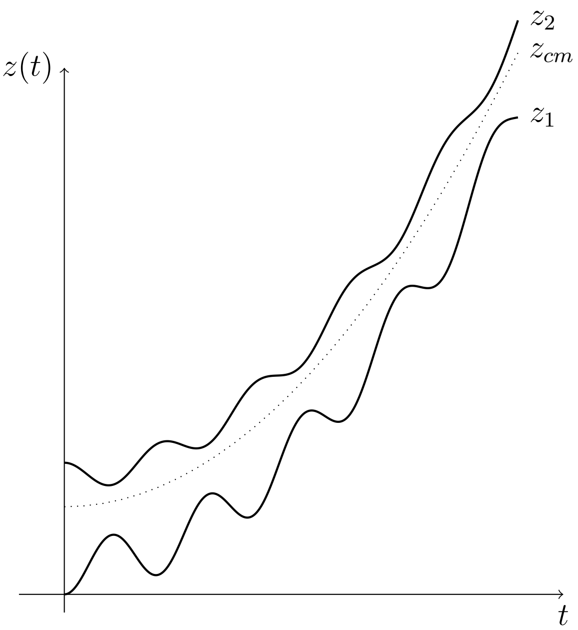
Applicando le condizioni iniziali:

$z_2 - z_1 = \ell_o + \frac{m_2 g}{\kappa}\cos(\omega t)$ (**)

(*Pocanzi abbiamo detto che $z_2 - z_1$ è positivo, mentre da questa espressione sembrerebbe che possa diventare negativo, ad esempio per κ sufficientemente piccolo; non preoccupiamoci di questa eventualità, che corrisponde, nell'oscillatore armonico, al caso in cui la molla si rovescia rispetto all'estremo fisso.*)

Per ricavare z_1 e z_2 risolviamo il sistema tra la (**) e l'equazione che definisce il centro di massa:

$m_1 z_1 + m_2 z_2 = (m_1 + m_2) z_{cm}$



Otteniamo:

$z_1 = z_{cm} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\left[\ell_o + \frac{m_2 g}{\kappa}\cos(\omega t)\right]$

$z_2 = z_{cm} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\left[\ell_o + \frac{m_2 g}{\kappa}\cos(\omega t)\right]$

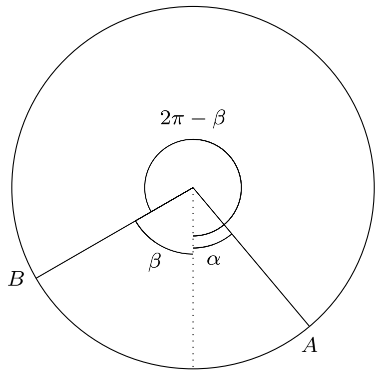
Con z_{cm} dato dalla (*). Notiamo che per ciascuna massa il moto risultante è la sovrapposizione del moto del centro di massa e di una oscillazione e che l'ampiezza di tale oscillazione è maggiore per la massa più piccola.

La figura mostra il grafico della legge oraria del moto per il centro di massa e per le due masse; m_2 è doppia rispetto ad m_1.

4-DINAMICA DEI CORPI RIGIDI

Posizione angolare

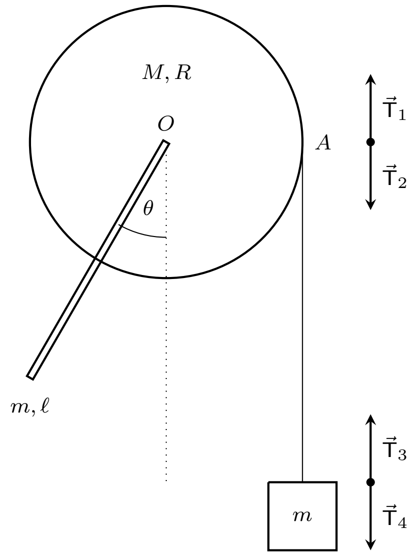
Nello studiare la rotazione di sistemi ad un grado di libertà utilizziamo quasi sempre l'angolo tra un raggio ed un asse di riferimento. Nella figura l'asse di riferimento è quello tratteggiato: la posizione A è rappresentata dall'angolo α, la posizione B dall'angolo $2\pi - \beta$. Tuttavia un angolo è definito a meno di un multiplo di 2π, per cui è equivalente dire che la posizione B è rappresentata dall'angolo $-\beta$; quindi una posizione a destra dell'asse di riferimento è rappresentata da un angolo positivo, una posizione a sinistra da un angolo negativo. Nella trattazione del pendolo, del problema seguente e di molti dei problemi successivi abbiamo usato questa convenzione.



4-00 - Nel sistema in figura il disco può ruotare senza attrito attorno ad un asse orizzontale perpendicolare al piano della figura, il blocchetto è sospeso ad un filo inestensibile e di massa trascurabile avvolto sul disco, la sbarretta è fissata al disco. I tre corpi sono omogenei.

a) calcolare , in funzione delle quantità indicate in figura, l'espressione dell'angolo θ per cui il sistema è in equilibrio, scrivere la condizione su $\frac{\ell}{R}$ per cui tale equilibrio è possibile, verificare che vi sono due posizioni di equilibrio salvo che per $\ell = 2R$, nel qual caso il sistema è in equilibrio se la bacchetta è in posizione orizzontale.

b) Considerando solo moti verticali del blocchetto ed utilizzando lo sviluppo in serie della funzione seno attorno all'angolo di equilibrio, scrivere l'equazione del moto e ricavare il periodo delle piccole oscillazioni.



A - Statica - In questa configurazione abbiamo due sistemi di corpi rigidi: il blocchetto, che possiamo assimilare ad un punto materiale, ed il sistema disco + sbarretta. Il sistema composto dai tre elementi non è invece un corpo rigido. C'è inoltre il filo: considerarlo ideale porta alle semplificazioni che vedremo.

Le quattro forze rappresentate in figura sono:

$\vec{\mathsf{T}}_1$, forza esercitata dal disco sul filo

$\vec{\mathsf{T}}_2$, forza esercitata dal filo sul disco

$\vec{\mathsf{T}}_3$, forza esercitata dal filo sul blocchetto

$\vec{\mathsf{T}}_4$, forza esercitata dal blocchetto sul filo

Per il terzo principio della dinamica:

$\vec{\mathsf{T}}_1 = -\vec{\mathsf{T}}_2 \qquad \text{e} \qquad \vec{\mathsf{T}}_3 = -\vec{\mathsf{T}}_4 \qquad (1)$

Sul blocchetto agiscono $\vec{\mathsf{T}}_3$ e la forza peso ; all'equilibrio si deve quindi avere:

$\vec{\mathsf{T}}_3 + m\vec{g} = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\mathsf{T}}_3 = -m\vec{g}$

Anche il filo è in equilibrio; in generale, per un filo di massa m_f scriviamo la condizione:

$\vec{\mathsf{T}}_1 + \vec{\mathsf{T}}_4 + m_f\vec{g} = \vec{0}$ e per $m_f = 0$ otteniamo: $\vec{\mathsf{T}}_1 = -\vec{\mathsf{T}}_4$

All'equilibrio quindi i moduli di queste quattro forze sono tutti uguali a mg. Questo è il risultato che otteniamo richiedendo che il filo ed il blocchetto siano in equilibrio. Passiamo al sistema disco + sbarretta:

Un sistema di corpi rigidi è in equilibrio quando:

a) la risultante di tutte le forze esterne agenti su di esso è nulla;

b) la somma dei momenti di tutte le forze esterne calcolati rispetto ad un qualunque punto è nulla.

Sul sistema agiscono le seguenti forze esterne:

forza peso sul disco, reazione del vincolo, forza peso sulla sbarretta, forza esercitata dal filo sul disco ($\vec{\mathsf{T}}_2$).

La condizione a) permette di ricavare la reazione del vincolo; usiamo poi la b) per ricavare la condizione di equilibrio. Possiamo semplificare questi passaggi con una scelta intelligente del punto rispetto al quale calcolare i momenti: se scegliamo il punto O i momenti delle prime due forze sono nulli, quindi non avremo bisogno di ricavare la reazione del vincolo. Scriviamo dunque la condizione b): scegliamo l'asse x lungo la verticale e rivolto verso l'alto e l'asse z perpendicolare al piano della figura ed uscente da esso. Scegliamo inoltre $\theta = 0$ nella posizione verticale della sbarretta, $\theta < 0$ quando la sbarretta si trova dal lato disegnato in figura, $\theta > 0$ quando si trova dal lato opposto. I momenti rispetto ad O della forza peso sulla sbarretta e di $\vec{\mathsf{T}}_2$ sono entrambi diretti lungo z, quindi dobbiamo scrivere la b) per la sola componente z:

$-mg\frac{\ell}{2}\sin\theta - mgR = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \sin\theta = -2\frac{R}{\ell} \qquad (2)$

(notare il segno del primo termine).L'ultima equazione è la condizione di equilibrio.

L'espressione di $\sin\theta$ è particolarmente semplice perchè abbiamo scelto uguali le masse del blocchetto e della sbarretta; se le avessimo scelte diverse, questa espressione sarebbe moltiplicata per il rapporto tra le due masse; essa non contiene comunque la massa del disco, che entrerà solo nell'equazione dinamica. Il valore assoluto di $\sin\theta$ deve essere minore o uguale ad 1, otteniamo quindi la condizione:

$\ell \geq 2R$

nel caso $\ell = 2R$ abbiamo una sola posizione di equilibrio data da $\theta = -\frac{\pi}{2}$, cioè con la sbarretta in posizione orizzontale. In tutti gli altri casi ne abbiamo due, entrambe con θ negativo : una con $\theta > -\frac{\pi}{2}$, quindi con la sbarretta rivolta verso il basso; se indichiamo con θ_e questo valore, l'altra posizione di equilibrio si ha per $\theta = -\pi + \theta_e$. cioè con la sbarretta rivolta verso l'alto. Verificate che la prima è di equilibrio stabile e la seconda di equilibrio instabile. Analizzate anche il tipo di equilibrio nel caso $\ell = 2R$.

B - Dinamica

Indichiamo con $\vec{v}$ ed $\vec{a}$ la velocità e l'accelerazione del blocchetto e con $\vec{\omega}$ ed $\vec{\alpha}$ la velocità angolare e l'accelerazione angolare del disco; $\vec{\omega}$ è diretta lungo l'asse z, $\vec{v}$ lungo l'asse x; per una rotazione in senso antiorario del disco $\vec{\omega}$ ha verso uscente dal piano della figura, quindi $\omega_z > 0$, e il blocchetto sale verso l'alto, quindi, con la nostra scelta degli assi, $v_x > 0$. Se il filo resta teso ed è inestensibile, tutti i suoi punti si devono muovere con la stessa velocità del blocchetto, in particolare anche il punto A di tangenza del filo al disco; ma se il filo non striscia sul disco la velocità di questo punto deve essere uguale a quella del corrispondente punto del disco. Questa è diretta lungo x, è rivolta verso l'alto ed ha modulo ωR. In definitiva possiamo scrivere:

$v_x = \omega_z R$ e derivando questa relazione: $a_x = \alpha_z R \qquad (3)$

quest'ultima relazione è fondamentale: mostra che l'accelerazione angolare del disco è legata a quella lineare del blocchetto ed in definitiva nel problema abbiamo un'unica incognita. Spesso la trovere scritta come $a = \alpha R$, intendendo con a ed α le accelerazioni scalari (non i moduli); se avessimo scelto l'asse x rivolto verso il basso o se il blocchetto si trovasse dall'altro lato del disco avremmo dovuto scrivere $a_x = -\alpha_z R$ o $a = -\alpha R$. Verificate che le stesse relazioni valgono per una rotazione oraria del disco.

Le relazioni (1) valgono ovviamente in generale, mentre per il filo dovremo scrivere:

$\vec{\mathsf{T}}_1 + \vec{\mathsf{T}}_4 + m_f\vec{g} = m_f\vec{a}$ e per $m_f = 0$ otteniamo nuovamente: $\vec{\mathsf{T}}_1 = -\vec{\mathsf{T}}_4$

Quindi abbiamo che le quattro forze rappresentate in figura hanno tutte lo stesso modulo, che indichiamo con T. Per il blocchetto avremo invece:

$\vec{\mathsf{T}}_3 + m\vec{g} = m\vec{a} \qquad \Rightarrow$ (componente x) $\qquad \mathsf{T} - mg = ma_x \qquad (4)$

Per il sistema disco + sbarretta : la seconda equazione cardinale ha solo componente lungo z: $-mg\frac{\ell}{2}\sin\theta - \mathsf{T}R = I\alpha_z \qquad (5)$

$I = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{3}m\ell^2$ è il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse di rotazione.

(3) (4) e (5) permettono di ricavare α_z: si elimina T tra la (4) e la (5), si utilizza la (3) per eliminare a_x e si ottiene:

$(I + mR^2)\,\alpha_z = mg\left(-\frac{\ell}{2}\sin\theta - R\right)$

Ma α_z è la derivata seconda rispetto al tempo di θ, che indichiamo con $\ddot{\theta}$:

$(I + mR^2)\,\ddot{\theta} = mg\left(-\frac{\ell}{2}\sin\theta - R\right)$

Per studiare le piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio stabile θ_e dobbiamo utilizzare lo sviluppo in serie di Taylor al primo ordine di $\sin\theta$ intorno a tale valore:

$\sin\theta \simeq \sin\theta_e + \cos\theta_e(\theta - \theta_e) \qquad (*)$

ed utilizzare la relazione (2) che vale per i due angoli di equilibrio, quindi per $\sin\theta_e$. Si ottiene:

$(I + mR^2)\,\ddot{\theta} \simeq -\frac{\ell}{2}mg\cos\theta_e\,(\theta - \theta_e)$

d'ora in avanti scriviamo le eguaglianze approssimate come esatte. Confrontiamo questa equazione con quella del pendolo:

$d\ddot{\theta} = -g\theta$

hanno entrambe la forma 'costante positiva$\cdot\ddot{\theta}$ = costante negativa$\cdot\theta$ ' (ricordate l'universalità dell'oscillatore armonico !) ma la nostra ha in più il termine, indipendente da θ, $\frac{\ell}{2}mg\theta_e\cos\theta_e$. Imparerete a risolvere anche questo tipo di equazioni, per il momento possiamo usare un accorgimento, un cambio di variabile che permette di riportare la nostra equazione a quella del pendolo:

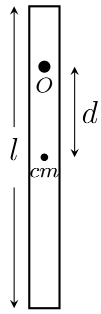
$\phi = \theta - \theta_e \quad ; \quad \ddot{\phi} = \ddot{\theta} \qquad$ (θ_e è costante)

dal punto di vista fisico, questo corrisponde ad utilizzare come variabile proprio lo spostamento angolare dalla posizione di equilibrio. L'equazione diventa:
$(I+mR^2)\,\ddot{\phi} = -\frac{\ell}{2}mg\cos\theta_e\phi$ (**)
ora l'equazione è proprio quella del pendolo (o dell'oscillatore armonico) con costanti diverse. Nel caso del pendolo il periodo è $2\pi\sqrt{\frac{d}{g}}$. Nel nostro caso:
$T = 2\pi\sqrt{\frac{I+mR^2}{\frac{\ell}{2}mg\cos\theta_e}}$
OSSERVAZIONI
(*) per $\theta_e = -\frac{\pi}{2}$ (la posizione di equilibrio per $\ell = 2R$) il termine al prim'ordine si annulla , dovremmo calcolare il second'ordine e l'equazione si complica. Se verificate il tipo di equilibrio, troverete che è un po' particolare , e questo si riflette in questa complicazione dell'equazione.
(**) notate che la costante che moltiplica ϕ è negativa per $\theta_e > -\frac{\pi}{2}$, cioè per la posizione di equilibrio stabile trovata prima. Per l'altra posizione di equilibrio la costante è positiva, quindi l'equazione non è più quella del pendolo; in effetti quella è una posizione di equilibrio instabile, e siccome la sbarra si allontana indefinitamente da essa non possiamo comunque applicare l'approssiazione di piccoli spostamenti.

4-01 - Una sbarretta omogenea di massa m , lunghezza l e larghezza e spessore trascurabili rispetto ad l può ruotare attorno ad un asse orizzontale passante per il suo centro di massa. L'attrito con l'asse produce sulla sbarretta un momento di modulo τ. Al tempo $t = 0$ il modulo della velocità angolare della sbarretta è ω_o; calcolare in quale istante di tempo la sbarretta si ferma.

Il momento d'inerzia della sbarretta rispetto all'asse di rotazione è dato da $I = \frac{1}{12}ml^2$ ed il modulo dell'accelerazione angolare (II equazione cardinale) è dato da $\alpha = \frac{\tau}{I}$. Indipendentemente dal verso di rotazione e dalla scelta degli assi, l'attrito fa diminuire la velocità angolare, quindi il modulo di tale velocità in funzione del tempo sarà dato da:
$\omega(t) = \omega_o - \alpha t$
$\omega(t)$ si annulla quindi per $t = \frac{\omega_o}{\alpha}$.

4-02 - Una sbarretta omogenea di massa m , lunghezza l e larghezza e spessore trascurabili rispetto ad l può ruotare senza attrito attorno ad un asse orizzontale situato a distanza d dal suo centro di massa cm. Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni attorno alla sua posizione di equilibrio stabile in funzione di m, l, d e dell'accelerazione di gravità.



Il momento d'inerzia rispetto ad O è dato da (teorema di Huygens-Steiner):

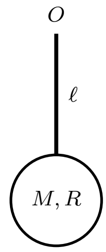
$$I_O = I_{cm} + m\cdot d^2 = \left(\frac{1}{12}l^2 + d^2\right)\cdot m$$

Introduciamo l'asse z uscente dal foglio ed indichiamo con θ l'angolo formato tra la sbarretta e la direzione verticale ($\theta = 0$ nella posizione di equilibrio stabile, $\theta > 0$ per una rotazione antioraria). Indicando con α e τ le componenti lungo z dell'accelerazione angolare e della somma dei momenti delle forze agenti sulla sbarretta calcolati rispetto ad O e considerando che il momento rispetto ad O della reazione vincolare dell'asse orizzontale è nullo, possiamo scrivere la seconda equazione cardinale:

$$I_O\alpha = \tau = -d\cdot m\cdot g\cdot sin(\theta) \simeq -d\cdot m\cdot g\cdot\theta$$

Nell'approssimazione di piccole oscillazioni l'equazione si scrive dunque: $I_O\ddot{\theta} = -d\cdot m\cdot g\cdot\theta$
Ed il periodo risulta essere dato da (analogia col pendolo semplice) : $T = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{I_O}{d\cdot m\cdot g}} = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{12}l^2+d^2\right)}{d\cdot g}}$

4-03 - Il sistema rappresentato in figura è costituito da un'asta di lunghezza ℓ e di dimensioni trasversali trascurabili rispetto ad ℓ; la densità lineare di massa della sbarretta è data da $\lambda = kx$, dove k è una costante ed x è la distanza dall'estremo O. All'altro estremo della sbarretta è vincolato rigidamente un disco di massa M e raggio R. Il sistema può ruotare senza attrito attorno ad un asse orizzontale passante per O.

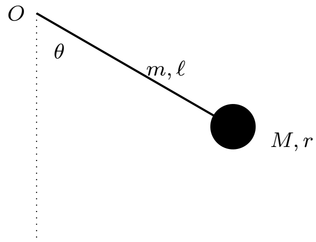


Calcolare, in funzione delle quantità date in precedenza:
a) la massa della sbarretta;
b) la distanza del suo centro di massa da O;
c) il periodo delle piccole oscillazioni del sistema intorno alla sua posizione di equilibrio.

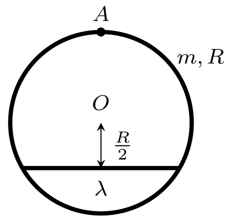
---

a) $m = \int_0^\ell \lambda\, dx = \int_0^\ell kx\, dx = \frac{1}{2}k\ell^2$
b) Introducendo l'asse x rivolto verso il basso e con origine in O: $x_{CM} = \frac{1}{m}\int x\, dm = \frac{1}{m}\int_0^\ell x\lambda\, dx = \frac{1}{m}\int_0^\ell kx^2\, dx = \frac{2}{3}\ell$
c) Momento d'inerzia dell'asta rispetto ad O:
$I_a = \int x^2\, dm = \frac{1}{2}m\ell^2$ (notare che è maggiore di quello di un'asta omogenea).
Momento d'inerzia del sistema rispetto ad O (teorema di Steiner) :
$I = I_a + \frac{1}{2}MR^2 + M(\ell + R)^2$
Seconda equazione cardinale per piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio stabile :
$I\ddot{\theta} \simeq -\left[mgx_{CM} + Mg(\ell + R)\right]\theta$. Quindi:
$\omega = \sqrt{\frac{\frac{2}{3}mg\ell + Mg(\ell+R)}{I}}$

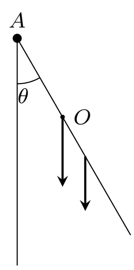
4-03a - Il corpo rigido rappresentato in figura è costituito da due parti omogenee, un'asta di massa m e lunghezza ℓ ed un disco di massa M e raggio r. Esso può ruotare senza attrito nel piano (verticale) della figura attorno ad un asse passante per O.
a) Calcolare la distanza da O del centro di massa del corpo;
b) calcolare il suo momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione;
c) Nel caso in cui il corpo parta da fermo dalla posizione indicata in figura, in cui l'asta forma un angolo θ con la verticale, calcolare la sua velocità angolare nell'istante in cui l'asta si trova in posizione verticale.



4-04 - Il sistema rigido rappresentato in figura è costituito da un anello sottile omogeneo di massa m e raggio R e da un'asta sottile omogenea di densità lineare di massa λ saldata all'anello a distanza $\frac{R}{2}$ dal suo centro. Il sistema può ruotare senza attrito attorno ad un'asse orizzontale passante per A. Calcolare, in funzione delle quantità date e di g, il periodo delle piccole oscillazioni del sistema attorno alla sua posizione di equilibrio stabile.



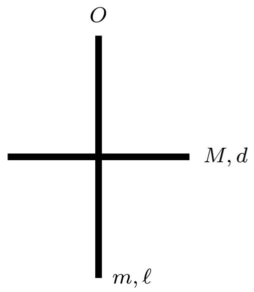
Introduciamo un asse z perpendicolare al piano della figura, passante per A e diretto verso l'alto. Consideriamo una qualsiasi posizione del centro di massa O dell'anello, individuata dall'angolo θ in figura. Quando θ aumenta il sistema ruota in senso antiorario ed il vettore velocità angolare è dato da $\hat{\omega} = \dot{\omega}\hat{z}$; analogamente, quando la velocità angolare aumenta l'accelerazione angolare è diretta verso l'alto, quindi : $\vec{\alpha} = \ddot{\theta}\hat{z}$.



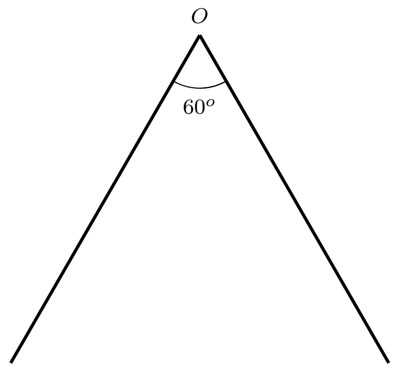
Le forze esterne agenti sul sistema sono: la reazione del vincolo (non rappresentata in figura) in A e le forze peso sull'anello e sul disco, applicate nei rispettivi centri di massa (rappresentate in figura). Scriviamo ora la seconda equazione cardinale dei corpi rigidi, scegliendo come polo il punto fisso A :
$I\ddot{\theta} = \tau_z$
Dove I è il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse z e τ_z è la componente z della somma dei momenti delle forze esterne rispetto ad A. In assenza di attrito il momento della reazione vincolare è nullo, quindi:
$I\ddot{\theta} = -mgR\sin\theta - Mg\frac{3}{2}R\sin\theta \simeq -g(m + \frac{3}{2}M)R\theta$
M essendo la massa dell'asta. (Vedi 4-00 e 4-02). In alternativa potremmo calcolare la posizione del centro di massa e considerare la forza peso applicata su tutto il sistema in tale punto, ma questa scelta complica inutilmente i calcoli. Notiamo che la scelta del polo ci consente di scrivere l'equazione senza conoscere la reazione vincolare, e quindi senza far ricorso alla prima equazione cardinale. Quindi il periodo delle piccole oscillazioni (vedi pendolo semplice ed esercizi citati in precendenza):

$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{g(m+\frac{3}{2}M)R}}$
Dobbiamo ora calcolare M ed I. La lunghezza dell'asta è $\sqrt{3}R$, quindi:
$M = \lambda\sqrt{3}R$
Per calcolare I rispetto all'asse z passante per A sommiamo i momenti d'inerzia dei due elementi del sistema, partendo dai loro valori calcolati rispetto all'asse passante per il centro di massa ed applicando il teorema di Steiner (ℓ è la lunghezza dell'asta):
$I = mR^2 + mR^2 + \frac{1}{12}M\ell^2 + M\left(\frac{3}{2}\right)^2 R^2 = \left(2m + \frac{5}{2}M\right)R^2$

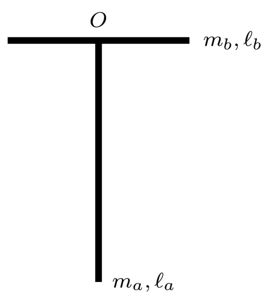
4-05 - Il sistema rigido rappresentato in figura è costituito da due aste omogenee perpendicolari tra loro ed unite nel loro centro di massa. Il sistema è libero di ruotare senza attrito attorno ad un asse orizzontale perpendicolare al piano della figura e passante per l'estremo O.
Trascurando le dimensioni trasversali delle aste rispetto a quelle longitudinali calcolare:
a) il momento d'inerzia del sistema rispetto ad un asse coincidente con l'asse di rotazione;
b) la velocità angolare minima che bisogna imprimere al sistema nella posizione in figura affinchè esso compia un giro completo;
c) la frequenza delle piccole oscillazioni del sistema attorno alla posizione di equilibrio in figura.



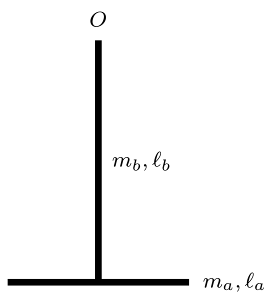
4-06 - Il sistema rappresentato in figura è costituito da due sbarrette uguali, sottili, omogenee, di massa m e lunghezza ℓ, fissate rigidamente tra loro nell'estremo O. Il sistema può ruotare senza attrito attorno ad un asse passante per O e perpendicolare al piano della figura. Calcolare:
a) la distanza da O del centro di massa del sistema;
b) il momento d'inerzia del sistema rispetto ad O;
c) il periodo delle piccole oscillazioni del sistema attorno alla posizione di equilibrio stabile.



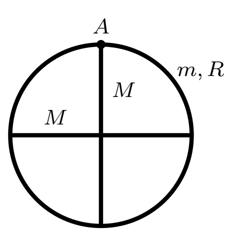
4-07 - Il sistema rigido rappresentato in figura è costituito da due aste omogenee perpendicolari tra loro. Il sistema è libero di ruotare senza attrito attorno ad un asse orizzontale perpendicolare al piano della figura e passante per il punto O in cui le sbarrette sono vincolate fra loro.
Trascurando le dimensioni trasversali delle aste rispetto a quelle longitudinali calcolare:
a) il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse di rotazione;
b) la frequenza delle piccole oscillazioni del sistema attorno alla posizione di equilibrio in figura;
c) la velocità angolare minima che bisogna imprimere al sistema a partire dalla posizione in figura affinchè esso compia un giro completo.



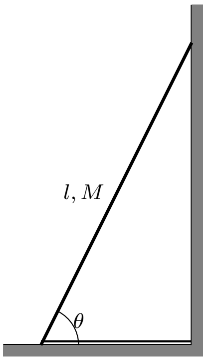
4-08 - Il sistema rigido rappresentato in figura è costituito da due aste omogenee perpendicolari tra loro. Il sistema è libero di ruotare senza attrito attorno ad un asse orizzontale perpendicolare al piano della figura e passante per l'estremo O della sbarretta b.
Trascurando le dimensioni trasversali delle aste rispetto a quelle longitudinali calcolare:
a) il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse di rotazione;
b) la frequenza delle piccole oscillazioni del sistema attorno alla posizione di equilibrio in figura;
c) la velocità angolare minima che bisogna imprimere al sistema a partire dalla posizione in figura affinchè esso compia un giro completo.



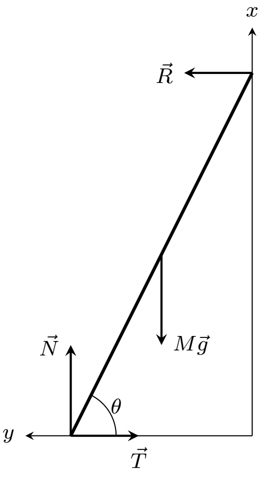
4-09 - Il sistema rigido rappresentato in figura è costituito da un anello sottile omogeneo di massa m e raggio R e da due aste sottili omogenee di massa M e lunghezza $2R$ saldate all'anello e perpendicolari tra loro. Il sistema può ruotare senza attrito attorno ad un'asse orizzontale passante per A.
a) Calcolare il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse di rotazione;
b) calcolare il periodo delle piccole oscillazioni del sistema attorno alla sua posizione di equilibrio stabile.



4-10 - Una scala di massa di massa M e lunghezza l è posizionata come in figura. Il contatto con la parete verticale e col pavimento è liscio e la scala è tenuta in equilibrio da una fune, inestensibile e di massa trascurabile, vincolata alla parete come in figura; calcolare la tensione della fune in funzione delle quantità indicate in figura.

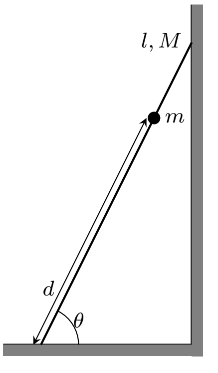


Un corpo rigido è in equilibrio quando sono nulle la risultante delle forze esterne e la somma dei momenti di tali forze calcolati rispetto ad un qualsiasi punto. In figura sono rappresentate tutte le forze agenti sulla scala; in particolare $\vec{T}$ è la forza esercitata su di essa dalla fune.

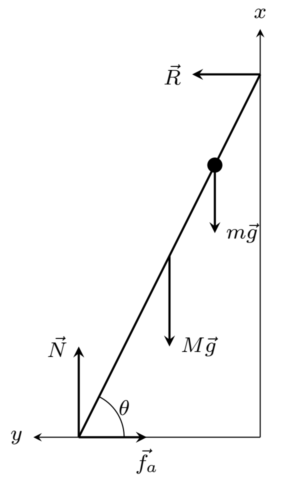


L'equilibrio delle forze lungo gli assi x e y si scrive rispettivamente:
$N - Mg = 0 \quad ; \quad R - T = 0 \quad$ (*)
Se scegliamo come polo il punto d'appoggio della scala sul pavimento i momenti delle forze sono tutti diretti lungo l'asse z :
$-\frac{l}{2}Mg\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) + lR\sin(\pi-\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{l}{2}Mg\cos\theta + lR\sin\theta = 0 \quad$ (**)
Dalla seconda delle (*) ricaviamo $R = T$ e sostituendo nella (**) otteniamo un'equazione nell'incognita T che ha per soluzione:
$T = \frac{1}{2}Mg\cot\theta$

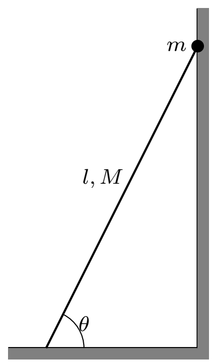
4-11 - Una scala di massa di massa M e lunghezza l è posizionata come in figura. Il contatto con la parete verticale è liscio, mentre il coefficiente di attrito statico del contatto col pavimento è μ_s. Un uomo, che assimiliamo ad un punto materiale di massa m, sale su di essa. Calcolare la massima distanza d che può percorrere lungo la scala in funzione delle quantità date e dell'angolo θ.



Un corpo rigido (nel nostro caso il sistema scala + uomo) è in equilibrio quando sono nulle la risultante delle forze esterne e la somma dei momenti di tali forze calcolati rispetto ad un qualsiasi punto. L'equilibrio delle forze lungo gli assi x e y si scrive rispettivamente:
$N - Mg - mg = 0 \quad ; \quad R - f_a = 0$
Se scegliamo come polo il punto d'appoggio della scala sulla parete i momenti delle forze sono tutti diretti lungo l'asse z :
$(l-d)mg\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + \frac{l}{2}Mg\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) - lN\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) + lf_a\sin(\pi-\theta) = 0 \quad \Rightarrow$
$(l-d)mg\cos\theta + \frac{l}{2}Mg\cos\theta - lN\cos\theta + lf_a\sin\theta = 0$

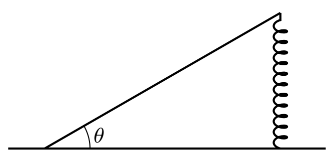


In queste equazioni i simboli rappresentano i moduli dei vettori definiti in figura; $\vec{R}$ ed $\vec{N}$, per la natura del vincolo, hanno necessariamente il verso indicato, mentre ad $\vec{f_a}$ abbiamo assegnato il verso che ci aspettiamo che tale forza debba avere. Se dalla soluzione del sistema di equazioni dovesse risultare che R o N sono negativi, vorrebbe dire che l'equilibrio è impossibile nella configurazione data, mentre se dovesse risultare che f_a è negativo, allora il verso è opposto a quello ipotizzato in figura. Il sistema di tre equazioni permette di ricavare le tre incognite R, N ed f_a in funzione delle altre quantità, in particolare di d. Per rispondere alla domanda del problema è preferibile ricavare d in funzione di f_a: l'applicazione della condizione $f_a \le \mu_s N$ ci darà la limitazione su d. Quindi ricaviamo N dalla prima equazione, sostituiamolo nella terza, ricaviamo d dalla terza e sostituiamo la condizione su f_a , che risulta essere $\quad f_a \le \mu_s(m+M)g$:
$d = l\left(\frac{f_a}{mg}\tan\theta - \frac{1}{2}\frac{M}{m}\right) \quad \Rightarrow \quad d_{max} = l\left(\mu_s\left(1+\frac{M}{m}\right)\tan\theta - \frac{1}{2}\frac{M}{m}\right)$
Come vediamo, $\frac{d_{max}}{l}$ dipende da tre parametri: aumenta con μ_s e θ, mentre non è immediato analizzare l'andamento al variare di $\frac{M}{m}$; inserendo i valori $\mu_s = 0.5$ (vedi tabelle dei coefficienti d'attrito) e $\theta = \frac{\pi}{4}$ otteniamo $\frac{d_{max}}{l} = 0.5$; sembra un valore ragionevole, per una scala messa a 45 gradi !.
Notiamo che in questo caso non possiamo risolvere il problema analizzando l'andamento dell'energia potenziale perchè la forza d'attrito compie lavoro e non è conservativa.



4-12 - Una scale di massa di massa M e lunghezza l è posizionata come in figura. Il contatto con la parete verticale è liscio, mentre il coefficiente di attrito statico del contatto col pavimento è μ_s. Un uomo, che assimiliamo ad un punto materiale di massa m, si trova in cima alla scala. Calcolare l'intervallo di valori dell'angolo θ per cui il sistema è in equilibrio.

4-13 - Nel sistema in figura la molla (costante elastica k, lunghezza di riposo l_0) può muoversi verticalmente. Al suo estremo libero è vincolato l'estremo di una sbarretta (massa m, lunghezza d, con $d > l_0$); l'altro estremo della sbarretta può scivolare senza attrito su un piano orizzontale. Il sistema ha due posizioni di equilibrio. Calcolare l'espressione di θ per tali posizioni in funzione delle quantità sopra indicate e dell'accelerazione di gravità e specificare il tipo di equilibrio.



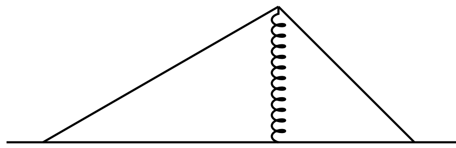
Introduciamo un asse z verticale diretto verso l'alto, con l'origine alla quota del piano di sostegno e scegliamo tale quota come zero dell'energia potenziale della forza peso. Indicando con z e z_{cm} le coordinate z dell'estremo della molla e del centro di massa della sbarretta, ed esprimendo poi z e z_{cm} in funzione dell'angolo θ, l'energia potenziale del sistema si scrive:
$$U(\theta) = mgz_{cm} + \frac{1}{2}k(z-l_0)^2 = \frac{1}{2}mgd\sin\theta + \frac{1}{2}k\left(d\sin\theta - l_0\right)^2$$
Indicando con U' la derivata rispetto a θ, la condizione di equilibrio è data da:
$$U'(\theta) = \frac{1}{2}mgd\cos\theta + k\left(d\sin\theta - l_0\right)d\cos\theta = d\cos\theta\left(\frac{1}{2}mg + kd\sin\theta - kl_0\right) = 0$$

L'uguaglianza si ha per i due valori di θ dati da: $\theta = \frac{\pi}{2} \quad e \quad \sin\theta = \frac{-\frac{1}{2}mg + kl_0}{kd} = \frac{l_0}{d} - \frac{1}{2}\frac{mg}{kd}$
$\theta = \frac{\pi}{2}$ è una posizione di equilibrio instabile perchè l'energia potenziale ha un massimo; infatti il termine in parentesi nell'espressione di U' è positivo per $\theta = \frac{\pi}{2}$ $(l_0 < d)$ e mantiene lo stesso segno per piccoli spostamenti da tale valore ; quindi U' ha lo stesso segno di $\cos\theta$.
Consideriamo ora l'espressione che ci da il secondo valore di θ : se $m = 0$, la posizione di equilibrio corrisponde alla posizione di riposo della molla, come ci aspettiamo; all'aumentare di m l'angolo diminuirà fino ad arrivare a zero quando la somma dei due addendi si annulla. Abbiamo dunque, al variare di m, un angolo di equilibrio compreso tra 0 e $\arcsin\left(\frac{l_0}{d}\right)$. Il segno di U' mostra poi che si tratta di equilibrio stabile. Analoghe considerazioni si possono fare per variazioni delle altre quantità.
Il tipo di equilibrio si può anche studiare analizzando il segno della derivata seconda:

$$U''(\theta) = -d\sin\theta\left(\frac{1}{2}mg + kd\sin\theta - kl_0\right) + kd^2\cos^2\theta$$

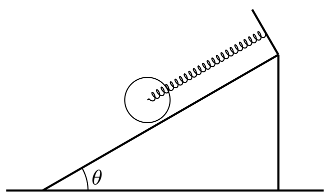
Per $\theta = \frac{\pi}{2}$ il secondo addendo è nullo ed il primo negativo $(l_0 < d)$, quindi l'equilibrio è instabile; per $\sin\theta = \frac{l_0}{d} - \frac{1}{2}\frac{mg}{kd}$ il primo addendo è nullo ed il secondo, ovviamente, positivo (equilibrio stabile).
Il tipo di equilibrio si può ricavare anche considerando l'andamento delle forze e dei momenti per piccoli spostamenti dalle due posizioni.
Nell'esercizio che segue facciamo una diversa scelta della variabile (un'altezza invece che un angolo). Provate a rifare questo caso con la stessa scelta.Troverete che si ottiene solo la posizione di equilibrio stabile; come mai ?

4-14 - Nel sistema in figura la molla (costante elastica κ, lunghezza di riposo ℓ_o) è vincolata a muoversi verticalmente. Al suo estremo libero sono vincolati gli estremi di due sbarrette omogenee (masse m_1, m_2, lunghezze d_1, d_2 maggiori di l_0); gli altri estremi delle sbarrette possono scivolare senza attrito su un piano orizzontale. Analizzare le posizioni di equilibrio del sistema, indicandone anche il tipo. Considerare la massa della molla trascurabile rispetto ad m_1, m_2.



Scegliamo come variabile la lunghezza della molla, h; entrambi i centri di massa si trovano ad una quota $\frac{h}{2}$. L'energia potenziale si scrive
$U(h) = \frac{1}{2}\kappa(h - \ell_o)^2 + \frac{1}{2}m_1gh + \frac{1}{2}m_2gh$
e la sua derivata rispetto ad h:
$U'(h) = \kappa(h - \ell_o) + \frac{1}{2}m_1g + \frac{1}{2}m_2g$
che si annulla per:
$h = \ell_o - \frac{g}{2\kappa}(m_1 + m_2)$
Notiamo che per κ sufficientemente piccolo o masse sufficientemente grandi ($2\kappa\ell_o < g(m_1 + m_2)$) h sarebbe negativo, cioè la posizione di equilibrio si troverebbe in una posizione non fisica per il sistema considerato.
La derivata seconda di U è sempre positiva, quindi l'equilibrio è stabile.

4-15 - Nel sistema in figura la molla ha costante elastica k e lunghezza di riposo ℓ_0 e il disco (massa m, raggio R) rotola senza strisciare sul piano inclinato. Inizialmente la molla ha lunghezza ℓ_0 ed il disco ha velocità nulla; calcolare:
a) La lunghezza della molla alla quale il sistema è in equilibrio.
b) La velocità del centro di massa e la velocità angolare del disco nel punto di equilibrio.



Introduciamo un asse x nel piano della figura, parallelo al piano inclinato, rivolto verso il basso e con l'origine nell'estremo della molla vincolato al piano inclinato; scegliendo la quota di tale punto come zero dell'energia potenziale della forza peso, l'energia potenziale del sistema si scrive:

$$U(x) = \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2 - mgx\sin\theta$$

I due termini rappresentano l'energia potenziale elastica e quella della forza peso. Le altre due forze agenti sul disco, reazione normale del piano inclinato e forza d'attrito statico, non compiono lavoro. (notare: il centro di massa si trova al di sotto del livello zero dell'energia potenziale della forza peso , che è quindi negativa). Indicando con U' la derivata rispetto ad x, la condizione di equilibrio è data da:

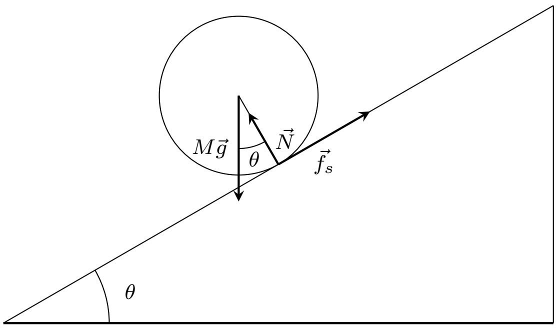
$$U'(x) = k(x - \ell_0) - mg\sin\theta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_{eq} = \ell_0 + \frac{mg\sin\theta}{k}$$

(notare: $x_{eq} > \ell_0$, x_{eq} aumenta con θ e diminuisce con k). Per calcolare la velocità nella posizione di equilibrio, applichiamo la conservazione dell'energia tra la posizione iniziale, nella quale l'energia cinetica e quella potenziale elastica sono nulle, e la posizione x_{eq}:

$$-mg\ell_0\sin\theta = \frac{1}{2}k(x_{eq}-\ell_0)^2 - mgx_{eq}\sin\theta + \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}\frac{(mg\sin\theta)^2}{k} = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad \Rightarrow \qquad v_{cm} = \pm$$

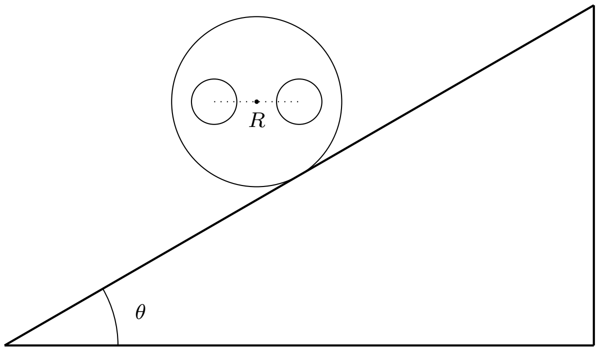
I quattro termini a destra sono rispettivamente: energia potenziale elastica e della forza peso, energia cinetica del centro di massa, energia cinetica di rotazione. v_{cm} è la velocità scalare lungo l'asse x, $I = \frac{1}{2}mR^2$ è il momento d'inerzia del disco rispetto all'asse perpendicolare alla sua superficie passante per il centro di massa. Poichè il moto è di rotolamento puro, $\omega = \frac{v_{cm}}{R}$. La seconda uguaglianza si ottiene sostituendo l'espressione di x_{eq}, la terza quella di I ed ω. L'espressione finale è molto semplice perchè si è scelto come posizione iniziale quella di riposo della molla.

4-16 - Dato un piano inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale ed un disco omogeneo di massa M e raggio R che rotola su di esso con coeffiecente di attrito statico μ_s:
a) dimostrare che il valore massimo di θ affinchè si abbia rotolamento puro è dato da: $\tan\theta_{max} = 3\mu_s$;
b) nel caso in cui invece del disco si abbia un anello della stessa massa, dello stesso raggio e di spessore trascurabile rispetto al raggio, θ_{max} è maggiore o minore che nel caso precedente? Giustificare la risposta.

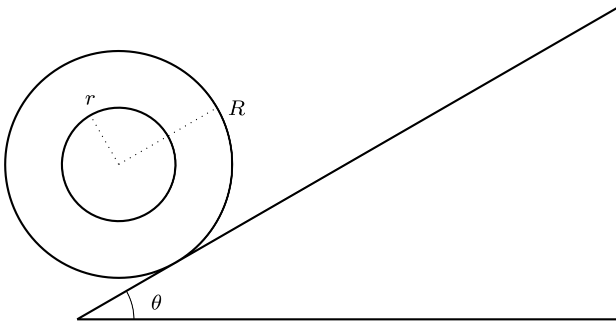


a) Utilizziamo un sistema di riferimento con l'asse x parallelo al piano inclinato e rivolto verso il basso e l'asse y nel piano della figura e rivolto verso l'alto; la posizione dell'origine è irrilevante per i calcoli che faremo.
Ipotizziamo che la forza d'attrito statico $\vec{f_s}$ agisca nel verso indicato in figura. Indicando con $\vec{a}$ l'accelerazione del centro di massa del disco e con $\vec{\alpha}$ la sua accelerazione angolare, la prima equazione cardinale dei corpi rigidi, lungo le direzioni x e y , si scrive:
$Mg\sin\theta - f_s = Ma_x \quad ; \quad -Mg\cos\theta + N = Ma_y = 0$ (*)
scegliendo come polo il centro di massa del disco, solo $\vec{f_s}$ ha momento non nullo e la seconda equazione cardinale si scrive (l'asse z è entrante nel piano della figura ed il momento di $\vec{f_s}$ è uscente) :
$-Rf_s = I\alpha_z$
infine la condizione di rotolamento puro si scrive (se a_x è positiva l'accelerazione angolare è uscente dal piano della figura e quindi α_z è negativa):
$-a_x = R\alpha_z$
Sostituendo le ultime due equazioni nella prima delle (*):
$Mg\sin\theta - f_s = -MR\alpha_z = \frac{MR^2}{I}f_s \quad \Rightarrow \quad f_s = \frac{Mg\sin\theta}{1+\frac{MR^2}{I}}$
f_s risulta positivo per tutti i possibili valori di θ quindi l'ipotesi iniziale sul verso di $\vec{f_s}$ è corretta.
Ricavando ora N dalla seconda delle (*), sostituendo $I = \frac{1}{2}MR^2$ e considerando che la forza di attrito statica è soggetta alla limitazione $f_s \leq \mu_s N$ otteniamo:
$\tan\theta \leq 3\mu_s \quad \Rightarrow \quad \tan\theta_{max} = 3\mu_s$
b) nel caso dell'anello bisogna sostituire nei calcoli precedenti il momento d'inerzia $I = MR^2$; si ottiene:
$\tan\theta_{max} = 2\mu_s$
quindi l'angolo massimo è minore.

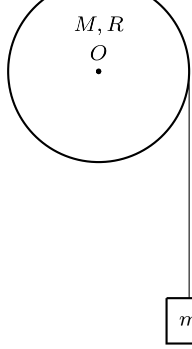
4-17 - Il corpo rigido rappresentato in figura è costituito da un disco di raggio R in cui sono praticati due fori circolari di raggio r, disposti simmetricamente rispetto al centro del disco e il cui centro dista $\frac{R}{2}$ da quello del disco. Il corpo è omogeneo e la sua densità superficiale di massa è σ.
a) Calcolare la posizione del centro di massa del corpo;
b) calcolare il momento d'inerzia del corpo rispetto ad un asse perpendicolare al piano della figura e passante per il suo centro di massa;
c) il corpo viene fatto rotolare, partendo da fermo, su un piano inclinato di un angolo θ, di coefficiente d'attrito statico μ_s; calcolare, in funzione delle altre quantità indicate in precedenza, il valore massimo di θ affinchè il moto sia di rotolamento puro.



4-18 - Il corpo rigido rappresentato in figura ha una superficie costituita da una corona circolare di raggi r e R e spessore trascurabile rispetto ai raggi. Il corpo è omogeneo e la sua densità superficiale di massa è σ. Esso viene messo in moto di puro rotolamento e risale lungo un piano inclinato di un agolo θ rispetto all'orizzontale. Sia v_o il modulo della velocità iniziale del centro di massa.
Calcolare la distanza percorsa dal centro di massa del corpo lungo il piano inclinato prima di fermarsi.



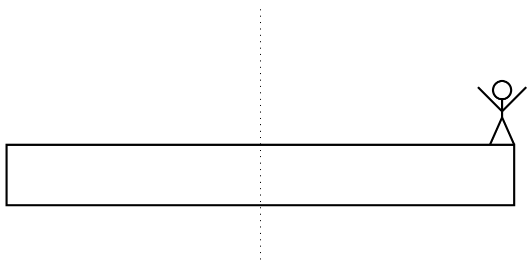
Massa del corpo: $m = \sigma\pi(R^2 - r^2)$
Momento d'inerzia rispetto ad un asse perpendicolare alla superficie e passante per il CM (bisogna sottrarre al momento di un disco pieno il momento del disco interno mancante) :
$I = \frac{1}{2}\sigma\pi R^2 R^2 - \frac{1}{2}\sigma\pi r^2 r^2 = \frac{1}{2}m(R^2 + r^2)$
Conservazione dell'energia (h è la quota massima raggiunta dal CM del disco rispetto alla quota iniziale):
$\frac{1}{2}mv_o^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = mgh \quad ; \quad \omega = \frac{v_o}{R}$
da cui si ricava h e $d = \frac{h}{\sin\theta}$ (distanza percorsa lungo il piano inclinato).



4-14 - Nel sistema in figura il disco può ruotare senza attrito attorno ad un asse orizzontale passante per il centro e perpendicolare al piano della figura; il blocchetto è sospeso ad un filo inestensibile e di massa trascurabile avvolto sul disco. I due corpi sono omogenei.
Calcolare le accelerazioni del disco e del blocchetto

Soluzione
Riprendere l'esercizio 00, ed eliminare tutti i termini relativi alla sbarretta:
$a_x = \alpha_z R$ (3)
$\mathsf{T} - mg = ma_x$ (4)
$-\mathsf{T}R = I\alpha_z$ (5)
$I = \frac{1}{2}MR^2$
Si ottiene: $a_x = -\frac{m}{m+\frac{1}{2}M}g.$

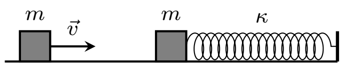
4-15 - Una piattaforma cilindrica omogenea di massa M e raggio R può ruotare senza attrito attorno al proprio asse; un uomo di massa m, che per semplicità assimiliamo ad un'asta sottile, è fermo sul bordo della piattaforma. Inizialmente il sistema ruota attorno all'asse con velocità angolare costante ω_o, in seguito l'uomo si sposta e si ferma al centro della piattaforma. Calcolare la velocità angolare del sistema nello stato finale.



Il sistema e il procedimento sono molto simili al caso, svolto a lezione e che si trova su molti testi, delle due palline che ruotano attorno ad un asse e si avvicinano, per l'azione di forze interne, allo stesso.
La quantità di moto non si conserva. Basta ragionare sul moto del centro di massa, che segue una traiettoria circolare; l'accelerazione deve essere prodotta dalla reazione dell'asse,che deve essere normale all'asse stesso e, poichè l'attrito è nullo, deve giacere nel piano della figura.
[Come sarebbe diretta la reazione se ci fosse anche l'attrito ? Dimostrate che il modulo della quantità di moto è $mR\omega_o$ nello stato iniziale e nullo in quello finale.]
Non si conserva neanche l'energia cinetica, perchè le forze interne tra uomo e piattaforma, che si esercitano durante il moto dell'uomo, compiono lavoro (come nel caso delle due palline).
Si conserva solamente la componente del momento angolare lungo l'asse di rotazione. Infatti il momento della forza esercitata dalla reazione, calcolato rispetto ad un qualunque punto dell'asse, è perpendicolare a tale asse. Quindi:
$I_o\omega_o = I_f\omega_f$
Il momento d'inerzia di una piattaforma cilindrica è uguale a quello di un un disco sottile (il cilindro può essere considerato la sovrapposizione di tanti dischi sottili).
Se l'uomo è assimilabile ad una bacchetta, tutti i suoi punti si trovano inizialmente alla stessa distanza R dall'asse (come nel caso dell'anello sottile); nello stato finale tale distanza è nulla. [Notate che l'altezza non serve]. Quindi: $I_o = \frac{1}{2}MR^2 + mR^2 \quad ; \quad I_f = \frac{1}{2}MR^2$

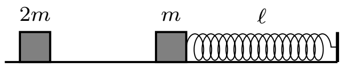
5-URTI

5-01 - Un blocchetto di massa m si muove con velocità orizzontale $\vec{v}$ su un piano anch'esso orizzontale ed urta contro un altro blocchetto uguale che è vincolato all'estremo di una molla ideale di costante elastica κ; il secondo blocchetto è inizialmente fermo. Dopo l'urto i due blocchetti rimangono solidali tra loro. Calcolare la massima compressione della molla.
Trascurare gli attriti e la compressione della molla durante l'urto.



Se trascuriamo la compressione della molla, durante l'urto la risultante delle forze esterne agenti sul sistema costituito dai due blocchetti è nulla; si conserva quindi la quantità di moto totale del sistema. Detto in altro modo, la velocità del loro centro di massa resta costante.
La velocità del sistema dei due blocchetti solidali subito dopo l'urto è dunque $\frac{1}{2}\vec{v}$.
Dopo l'urto si conserva l'energia meccanica del sistema; inizialmente è solo cinetica perchè la molla è a riposo, nella posizione di massima compressione è solo potenziale perchè la velocità dei blocchetti è nulla. Quindi, indicando con d la compressione massima richiesta:
$\frac{1}{4}mv^2 = \frac{1}{2}\kappa d^2 \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{\frac{mv^2}{2\kappa}}$

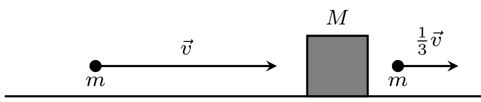
5-02 - Un blocchetto di massa m è appoggiato (non vincolato) ad un molla ideale di costante elastica κ e lunghezza di riposo ℓ_o disposta orizzontalmente. La molla viene compressa fino a una lunghezza $\ell < \ell_o$ e poi rilasciata.
a) Calcolare la velocità del blocchetto al momento in cui si distacca dalla molla.
b) Dopo il distacco il blocchetto urta contro un altro blocchetto di massa $2m$ e rimane solidale con esso; calcolare la velocità dei due blocchetti dopo l'urto.
Trascurare gli attriti.



---

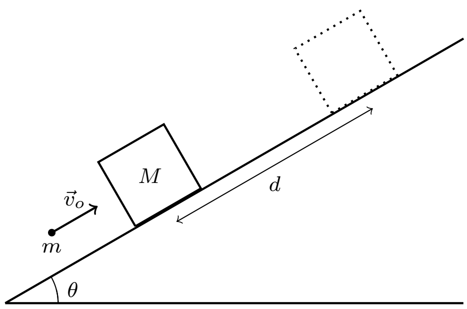
a) Conservazione dell'energia fra l'istante in cui la molla viene rilasciata e quello in cui il blocchetto si distacca (a partire dal momento in cui si distacca, l'energia potenziale è nulla):
$\frac{1}{2}\kappa(\ell - \ell_o)^2 = \frac{1}{2}mv^2$
Il modulo della velocità al momento del distacco è dunque :
$v = (\ell_o - \ell)\sqrt{\frac{\kappa}{m}}$
in questa espressione è sbagliato mettere $(\ell - \ell_o)$, come avete fatto quasi tutti, perchè è una quantità negativa. Chi ha provato a risolverlo considerato la forza agente sul blocchetto ha sbagliato nel considerare tale forza costante: per procedere correttamente si deve scrivere l'equazione differenziale dell'oscillatore armonico e risolverla.
b) Si conserva la quantità di moto; il modulo della velocità dopo l'urto è $\frac{1}{3}v$.

5-03 - Un blocchetto omogeneo di massa M è appoggiato su un piano orizzontale privo di attrito; un proiettile di massa m lo colpisce con velocità $\vec{v}$ perpendicolare ad una delle facce del blocchetto, nel centro di questa, e fuoriesce alla stessa quota iniziale con velocità $\frac{1}{3}\vec{v}$. Calcolare la velocità del blocchetto dopo l'urto.



Soluzione - Se il proiettile entra nel blocchetto nel punto indicato, esercita su di esso una forza impulsiva che ha momento nullo rispetto al suo centro di massa ed il blocchetto non ruota; possiamo dunque trattare il blocchetto come un punto materiale e l'urto come un urto tra punti materiali. L'urto è anelastico, si conserva la quantità di moto ma non l'energia cinetica; dalla conservazione della quantità di moto possiamo ricavare la velocità $\vec{w}$ del blocchetto:
$m\vec{v} = \frac{1}{3}m\vec{v} + M\vec{w} \quad \Rightarrow \quad \vec{w} = \frac{2}{3}\frac{m}{M}\vec{v}$

5-04 - Un blocchetto di massa M, che assimiliamo ad un punto materiale, è fermo sul piano inclinato in figura. Un proiettile di massa m si conficca nel blocchetto; prima dell'urto il proiettile ha la velocità $\vec{v}_o$ rappresentata in figura. μ è il coefficiente di attrito dinamico tra il blocchetto ed il piano. Supponendo che l'urto avvenga istantaneamente, calcolare:
a) la velocità del sistema blocchetto-proiettile subito dopo l'urto;
b) la forza di attrito dinamico che il piano esercita sul sistema;
c) la distanza d che il sistema percorre lungo il piano inclinato prima di fermarsi.

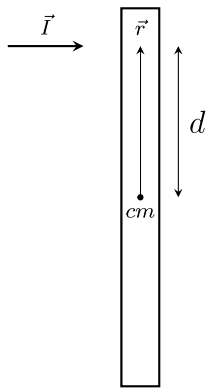


Soluzione
a) Conservazione della quantità di moto nell'urto anelastico: $m\vec{v}_o = (m+M)\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \frac{m}{m+M}\vec{v}_o$
b) Indichiamo con $\vec{N}$ la reazione normale che il piano esercita sul blocchetto; tale reazione deve equilibrare la componente della forza peso normale al piano, quindi : $N = (m+M)g\cos\theta$. La forza d'attrito ha modulo $f = \mu N$, è parallela al piano inclinato ed ha verso opposto a quello della velocità del sistema.
c) Subito dopo l'urto il sistema ha energia cinetica: $E = \frac{1}{2}(m+M)v^2$. Durante il moto del sistema verso l'alto la forza peso e quella d'attrito compiono un lavoro negativo, mentre la reazione normale del piano è perpendicolare allo spostamento e quindi non compie lavoro; per il teorema dell'energia cinetica la variazione di energia cinetica durante il moto è data da tale lavoro. Nella posizione di arresto l'energia cinetica è nulla, quindi:

$0 - E = -\mu N d - (m+M) g d \sin\theta$
Sostituendo le espressioni di E ed N otteniamo: $d = \frac{1}{2}\frac{v^2}{g(\mu\cos\theta + \sin\theta)}$

5-05 - Forza impulsiva applicata ad un corpo rigido libero

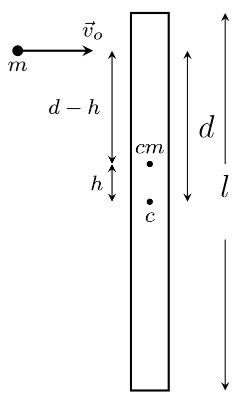
Una sbarretta omogenea di massa M , lunghezza l e larghezza e spessore trascurabili rispetto ad l è appoggiata su un piano orizzontale liscio ed è inizialmente in quiete. Una forza $\vec{F}$ parallela al piano e perpendicolare alla sbarretta viene applicata a distanza d dal centro di massa c della sbarretta; tale forza agisce per un breve intervallo di tempo Δt ed ha un impulso $\vec{I}$ (possiamo pensare ad un colpo dato con un dito alla sbarretta). Dato $\vec{I}$, studiare il moto della sbarretta dopo il tempo Δt.



Le forze esterne che agiscono sulla sbarretta sono la forza peso, la reazione del piano e la forza $\vec{F}$; le prime due si equilibrano tra di loro, quindi dobbiamo analizzare solo gli effetti di $\vec{F}$.
Ricordiamo che l'impulso di una forza che agisce per un tempo Δt è dato da
$\vec{I} = \int_0^{\Delta t} \vec{F}\, dt$
Scrivete la prima equazione cardinale per i corpi rigidi, integratela tra 0 e Δt e convincentevi che la la quantità di moto della sbarretta dopo che la forza ha agito è data da:
$M\vec{v}_{cm} = \vec{I}$
Quindi il centro di massa si muoverà con velocità $\frac{\vec{v}_{cm}}{M}$. Per studiare la rotazione della sbarretta dobbiamo usare la seconda equazione cardinale:
$\frac{d\vec{L}}{dt} = -(m+M)\vec{v}_p \times \vec{v}_{cm} + \vec{\tau}_{ext}$
Scegliendo il punto p (rispetto al quale calcolare il momento angolare e il momento delle forze esterne) coincidente col cm, il primo termine è nullo. I momenti della forza peso e della reazione vincolare si annullano tra loro, quindi rimane:
$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$
$\vec{r}$ è il vettore posizione rispetto al cm del punto in cui viene applicata la forza. Non conosciamo i dettagli di $\vec{F}$, cioè il suo andamento in funzione del tempo, ma solo il suo integrale $\vec{I}$, e per introdurlo nella nostra equazione dobbiamo integrarla rispetto al tempo. Nell'integrale del secondo membro in generale dovremmo considerare variabile nel tempo sia $\vec{r}$ che $\vec{F}$. Se tuttavia ipotizziamo che la forza agisce per un tempo così breve che $\vec{r}$ non varii, potremo sfilarlo fuori dall'integrale e scrivere (scegliendo l'asse z perpendicolare al piano ed entrante):
$\int_0^{\Delta t} \frac{d\vec{L}}{dt}\, dt =$ (cambiamento di variabile) $= \int_0^{\Delta t} d\vec{L} = \int_0^{\Delta t} \vec{r} \times \vec{F}\, dt = \vec{r} \times \vec{I} = Id\hat{z}$
Il primo integrale ci darà il momento angolare finale meno quello iniziale, che è nullo. Quindi:
$\vec{L}_{fin} = Id\hat{z} = I_{cm}\omega\hat{z}$
I_{cm} è il solito momento d'inerzia della sbarretta rispetto ad un asse perpendicolare al piano e passante per cm; questa equazione ci permette di calcolare ω. ω e la velocità del centro di massa ricavata prima sono tutto quello che ci serve per descrivere il moto della sbarretta dopo l'azione della forza. Cioè per un qualunque punto a della sbarretta potremo scrivere, indicando con $\vec{r}_a$ il suo vettore posizione rispetto a cm:
$\vec{v}_a = \vec{v}_{cm} + \vec{\omega} \times \vec{r}_a$

5-06 - Urto anelastico con un corpo rigido libero

Una sbarretta omogenea di massa M , lunghezza l e larghezza e spessore trascurabili rispetto ad l è appoggiata su un piano orizzontale liscio ed è inizialmente in quiete; un proiettile di massa m si muove come in figura (c è il centro di massa della sbarretta) e si conficca nella sbaretta rimanendole solidale. L'urto avviene in un tempo sufficientemente breve perchè la sbarretta possa essere considerata a riposo durante tale processo. Detto cm il centro di massa del sistema dopo l'urto:

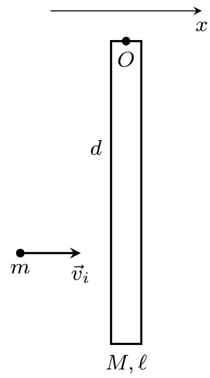


a) Determinare la distanza di cm da c in funzione delle quantità definite in figura e delle masse;
b) scrivere l'espressione della velocità di cm in funzione di $\vec{v}_o$;
c) scrivere l'espressione della velocità angolare di rotazione attorno a cm in funzione di v_o.
Trascurare gli effetti della forza peso sul proiettile prima dell'urto.

Soluzione - Dopo l'urto, il centro di massa del sistema si trova ad una distanza da c data da: $h = \frac{m}{m+M}d$.
Trascurando la forza peso agente sul proiettile prima dell'urto, abbiamo che la risultante delle forze esterne agenti sul sistema (forza peso e reazione vincolare del piano) hanno risultante nulla sia prima che dopo l'urto (dopo l'urto il sistema si muoverà sul piano di appoggio).

Quindi si conserva la quantità di moto. In un sistema di riferimento con origine fissa nel punto c, indicando con $\vec{v}_{cm}$ la velocità del centro di massa del sistema dopo l'urto, la conservazione della quantità di moto si scrive: $m\vec{v}_o = (m+M)\vec{v}_{cm} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_{cm} = \frac{m}{m+M}\vec{v}_o$
Per il momento angolare $\vec{L}$ calcolato rispetto ad un generico polo p che abbia velocità $\vec{v}_p$ vale la relazione (dinamica dei sistemi):
$\frac{d\vec{L}}{dt} = -(m+M)\vec{v}_p \times \vec{v}_{cm} + \vec{\tau}_{ext}$
$\vec{\tau}_{ext}$ (somma dei momenti delle forze esterne) è nullo; se scegliamo come polo il centro di massa del sistema anche il primo addendo è nullo ed il momento angolare del sistema si conserva. Introducendo un asse z verticale ed entrante nel piano della figura, $\vec{L}$ avrà solo componente lungo z e la conservazione di $\vec{L}$ lungo z prima e dopo l'urto si scriverà:
$mv_o(d-h) = I\omega$. I è il momento d'inerzia rispetto al centro di massa del sistema: $I = \frac{1}{12}Ml^2 + Mh^2 + m(d-h)^2$.
Quindi : $\omega = \frac{mv_o(d-h)}{I}$; $\vec{\omega} = \frac{mv_o(d-h)}{I}\hat{z}$. Notare che $d-h>0$.
Domanda per i più curiosi: dove si trova, ad un generico istante di tempo, l'asse istantaneo di rotazione ?

5-06 - Urto elastico con un corpo rigido vincolato - Centro di percussione

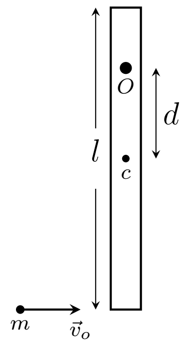


La massa puntiforme m urta elasticamente la sbarretta sottile, vincolata in O, a una distanza d dal vincolo.
Come abbiamo visto, un urto elastico è un urto in cui non viene dissipata energia cinetica. Qui dobbiamo considerare che sul sistema massa-sbarretta agiscono forze esterne che potrebbero modificare la sua energia cinetica anche in assenza di dissipazione; queste forze sono:
- reazione del vincolo, che si esercita in O: poichè O resta fisso, tale reazione non compie lavoro e quindi non modifica l'energia cinetica del sistema;
- forza peso: durante l'urto istantaneo la sbarretta resta in posizione verticale e la massa m resta alla stessa quota, quindi neanche la forza peso compie lavoro durante l'urto; i sui effetti si produrranno dopo l'urto.
Quindi anche in questo caso, come in quello delle due masse puntiformi, l'energia cinetica si conserva. Si conserva anche il momento angolare rispetto ad O, perchè sono nulli i momenti delle due forze esterne rispetto a tale punto. Non si conserva invece la quantità di moto, perchè sul sistema agisce la reazione del vincolo, che deve trattenere l'estremo della sbarretta.
Scelto l'asse x come in figura e l'asse z perpendicolare al piano della figura ed uscente, possiamo scrivere:
$\vec{v}_i = v_i\hat{x}$; $\vec{v}_f = v_{fx}\hat{x}$
Dove con $\vec{v}_f$ abbiamo indicato la velocità di m subito dopo l'urto. Abbiamo escluso che $\vec{v}_f$ abbia altre componenti; non è evidente o banale, ragionateci. Indichiamo infine con ω la velocità angolare scalare della sbarretta subito dopo l'urto. La conservazione di energia cinetica e momento angolare si scrive (il momento angolare rispetto ad O è diretto lungo z):
$\frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}mv_{fx}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$ (la sbarretta ruota intorno ad un asse fisso, I è il suo momento d'inerzia rispetto ad O)
$mdv_i = mdv_{fx} + I\omega$
Dal sistema di queste due equazioni possiamo ricavare ω e v_{fx}. Seguendo una procedura simile a quella usata per l'urto tra due masse puntiformi, le riscriviamo:
$m(v_i - v_{fx})(v_i + v_{fx}) = I\omega^2$
$md(v_i - v_{fx}) = I\omega$
dividiamo la prima per la seconda:
$v_i + v_{fx} = d\omega$
$md(v_i - v_{fx}) = I\omega$
Ricordiamo che con questa divisione abbiamo escluso la soluzione $v_{fx} = v_i, \omega = 0$ *, che pure è una soluzione del sistema, ma è relativa al caso in cui non c'è interazione tra i due oggetti.*
Risolvendo il sistema:
$v_{fx} = \frac{1}{2}\omega\left[d - \frac{I}{dm}\right]$; $\omega = 2v_i\frac{1}{d+\frac{I}{dm}}$
Notiamo che ω è sicuramente positivo, quindi la sbarretta ruota in senso antiorario, mentre v_{fx} può essere positivo, negativo o nullo (cioè m può proseguire verso destra con diversa velocità, o fermarsi, o muoversi verso sinistra) a seconda dei valori dei parametri. In questo problema ci sono essenzialmente due parametri : i rapporti $\frac{M}{m}$ e $\frac{\ell}{d}$. Ragionate su cosa succede al loro variare.
Calcoliamo ora la variazione di quantità di moto del sistema prima e dopo l'urto. Ricordiamo che il centro di massa della sbarretta si trova nel suo centro geometrico e che la sua velocità è $\frac{\ell}{2}\omega$ e che la quantità di moto di un sistema come la sbarretta è uguale alla massa totale moltiplicata per la velocità del centro di massa. Quindi:
$\Delta p = p_f - p_i = mv_{fx} - mv_i - M\frac{\ell}{2}\omega = \omega M\ell\left[-\frac{1}{3}\frac{\ell}{d} + \frac{1}{2}\right]$
Notiamo che Δp può essere positivo o negativo e che si annulla per: $d = \frac{2}{3}\ell$. In quest'ultimo caso l'impulso che la reazione del vincolo deve fornire al sistema è nulla, cioè l'asse di rotazione non viene sollecitato. Questo punto

si chiama **centro di percussione** della sbarretta. Immaginate di colpire una palla con una racchetta; conviene colpirla vicino al centro di percussione della racchetta, per diminuire il contraccolpo sulla mano. (In realtà la storia è più complicata, perchè la racchetta non è un corpo rigido e bisogna anche tener conto che dopo l'impatto può vibrare, procurando ulteriori sollecitazioni sulla mano).

---

01 - Una sbarretta omogenea di massa M , lunghezza l e larghezza e spessore trascurabili rispetto ad l può ruotare senza attrito attorno ad un asse orizzontale situato a distanza d dal suo centro di massa c ed è inizialmente in quiete. Un proiettile di massa m si conficca nell'estremo inferiore della sbarretta e rimane solidale con essa. Prima dell'urto il proiettile ha velocità orizzontale $\vec{v}_o$; ipotizzando che l'urto avvenga in un intervallo di tempo molto breve in modo che si possa trascurare il moto della sbarretta:
a) Scrivere l'espressione della velocità angolare del sistema in funzione dell'angolo formato dalla sbarretta con la verticale e delle quantità date in precedenza.
b) Calcolare il valore minimo del modulo della velocità iniziale del proiettile, v_o, affinchè la sbarretta possa compiere un giro completo.
c) Come vanno modificate le espressioni ottenute se il proiettile si conficca sempre nell'estremo della sbarretta ma la sua velocità iniziale forma un angolo φ con l'asse orizzontale ?



Soluzione - Fissiamo in O l'origine del sistema di riferimento e il livello zero per l'energia potenziale della forza peso. Indichiamo con I il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse di rotazione e con r_{cm} la distanza del suo centro di massa da O:

$$I = \frac{1}{12}Ml^2 + Md^2 + m\left(d + \frac{l}{2}\right)^2 \quad ; \quad r_{cm} = \frac{Md + m\left(d+\frac{l}{2}\right)}{m+M} = d + \frac{m}{m+M}\frac{l}{2}$$

L'unica quantità che si conserva durante l'urto è il momento angolare rispetto ad O. Infatti il momento della reazione vincolare è nullo rispetto a tale punto, come pure quello della forza peso agente sulla sbarretta e sul proiettile, se la sbarretta resta in posizione verticale; i momenti delle forze interne tra sbarretta e proiettile si annullano reciprocamente. La quantità di moto invece non si conserva: la sua variazione è prodotta dalla reazione vincolare. Il momento angolare iniziale è quello del solo proiettile, perpendicolare ed uscente dal piano della figura. Introducendo un asse z che ha tale direzione e verso ed indicando con ω_o il modulo della velocità angolare subito dopo l'urto, l'uguaglianza tra le componenti z dei momenti angolari iniziale e finale si scrive:

$$mv_o\left(d + \frac{l}{2}\right) = I\omega_o \quad \Rightarrow \quad \omega_o = \frac{mv_o}{I}\left(d + \frac{l}{2}\right)$$

Dopo l'urto, le forze esterne agenti sul sistema sono la forza peso, conservativa, e la reazione vincolare, che non compie lavoro. Di conseguenza durante il moto si conserva l'energia meccanica; indicando con θ l'angolo formato tra la sbarretta e l'asse verticale ($\theta = 0$ nella posizione iniziale) e con ω il modulo della velocità angolare nella posizione θ, la conservazione dell'energia si scrive:

$$\frac{1}{2}I{\omega^2}_o - r_{cm}(m+M)g = \frac{1}{2}I\omega^2 - r_{cm}\cos\theta(m+M)g \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = {\omega^2}_o - \frac{2}{I}r_{cm}(m+M)(1-\cos\theta)g$$

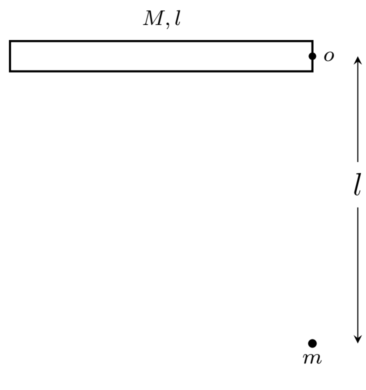
richiedendo che il secondo membro sia positivo si può ricavare l'angolo massimo che il sistema può raggiungere, Il valore minimo richiesto al punto b) si ricava imponendo che la sbarretta arrivi nella posizione verticale $\theta = \pi$ con velocità angolare nulla; quindi:

$${\omega^2}_{omin} = \frac{4}{I}r_{cm}(m+M)g \quad \Rightarrow \quad v_{omin} = \frac{1}{m\left(d+\frac{l}{2}\right)}I\omega_{omin} = \frac{1}{m\left(d+\frac{l}{2}\right)}I\sqrt{\frac{4}{I}r_{cm}(m+M)g} = \frac{2}{m\left(d+\frac{l}{2}\right)}\sqrt{Ir_{cm}(m+M)g}$$

Se la velocità iniziale forma un angolo φ con l'asse orizzontale nelle espressioni precedenti v_o va moltiplicato per $\cos\varphi$.

---

03 - Una sbarretta omogenea di massa M , lunghezza l e larghezza e spessore trascurabili rispetto ad l può ruotare senza attrito attorno ad un asse orizzontale situato ad un suo estremo. Inizialmente la sbarretta si trova in posizione orizzontale, come in figura. Viene lasciata libera ed urta un corpo di massa m assimilabile ad un punto materiale , situato nella posizione indicata in figura ed inizialmente a riposo , che si conficca nella sbarretta.
a) Scrivere l'espressione della velocità angolare della sbarretta subito prima dell'urto.
b) Scrivere l'espressione della velocità angolare del sistema subito dopo l'urto.
c) Scrivere l'espressione del valore massimo dell'angolo che il sistema forma con la verticale dopo l'urto.



Soluzione
a) Prima dell'urto sulla sbarretta agiscono la forza peso, conservativa, e la reazione vincolare dell'asse, che non compie lavoro. Si conserva dunque l'energia totale. Fissando in o il livello zero dell'energia potenziale della forza peso, la conservazione dell'energia si scrive:

$$0 = -Mg\frac{l}{2} + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad ; \quad I = \frac{1}{3}Ml^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{3\frac{g}{l}}$$

b) L'unica quantità che si conserva durante l'urto è il momento angolare rispetto ad o. Infatti il momento della reazione vincolare è nullo rispetto a tale punto, come pure quello della forza peso agente sulla sbarretta e sul proiettile, se la sbarretta resta in posizione verticale durante l'urto; i momenti delle forze interne tra sbarretta e proiettile si annullano reciprocamente. La quantità di moto invece non si conserva: la sua variazione è prodotta dalla reazione vincolare. Inizialmente il punto materiale è a riposo, quindi il momento angolare iniziale è quello della sola sbarretta, è perpendicolare ed uscente dal piano della figura. Introducendo un asse z che ha tale direzione e verso ed indicando con ω' il modulo della velocità angolare subito dopo l'urto, l'uguaglianza tra le componenti z dei momenti angolari iniziale e finale si scrive in modo molto semplice:

$I\omega = I'\omega' \quad \Rightarrow \quad \omega' = \frac{I}{I'}\omega \quad ; \quad I' = \frac{1}{3}Ml^2 + ml^2$

c) Dopo l'urto valgono le stesse considerazioni del punto a). Indicando con θ_m l'angolo massimo e considerando che nella posizione θ_m l'energia cinetica è nulla, la conservazione dell'energia tra le posizioni $\theta = 0$ e $\theta = \theta_m$ si scrive:

$\frac{1}{2}I'\omega'^2 - Mg\frac{l}{2} - mgl = (-Mg\frac{l}{2} - mgl)\cos\theta_m \quad \Rightarrow \quad \cos\theta_m = 1 - \frac{\frac{1}{2}I'\omega'^2}{Mg\frac{l}{2}+mgl} = 1 - \frac{1}{6\left(\frac{1}{3}+\frac{m}{M}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{m}{M}\right)}$

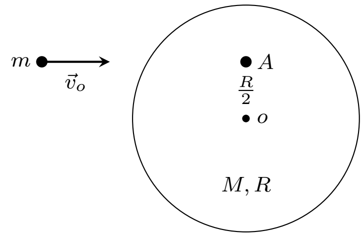
notare il valore che si ottiene per $m = 0$.

---

04 - Nel sistema in figura il disco omogeneo può ruotare senza attrito attorno ad un asse orizzontale passante per il suo centro e perpendicolare al piano della figura. Nella posizzione A si trova una sporgenza di massa trascurabile rispetto a quella del disco. Inizzialmente il disco è a riposo ed il proiettile si conficca nella sporgenza in modo tale che l'urto possa essere considerato istantaneo. Caolcolare, in funzione delle quantità indicate in figura:

a) La velocità angolare del sistema subito dopo l'urto.

b) La velocità angolare massima che il sistema può raggiungere.



Soluzione -

a) Durante l'urto si conserva il momento rispetto ad o, perchè i momenti delle forze esterne agenti sul sistema sono tutti nulli: quello della reazione dell'asse perchè è applicata in o ed il vincolo è liscio; quello della forza peso agente sul proiettile perchè, se l'urto avviene in un tempo molto breve, la sporgenza rimane in posizione verticale; quello del forza peso agente sul disco perchè applicata in o. Non si conserva la quantità di moto perchè il sistema non è isolato. Il momento angolare iniziale è quello del solo proiettile , è perpendicolare al piano della figura ed ha verso entrante in tale piano. Scegliendo l'asse z nella stessa direzione e verso, la conservazione della componente z del momento angolare si scrive (I è il momento d'inerzia del sistema rispetto a z dopo l'urto, ω la sua velocità angolare subito dopo l'urto) :

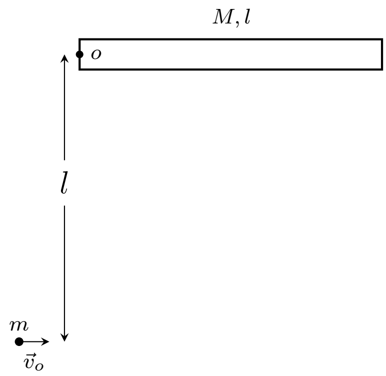
$$mv_o\frac{R}{2} = I\omega \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \frac{mv_o\frac{R}{2}}{I} = \frac{mv_o}{MR + \frac{1}{2}mR} \qquad ; \qquad I = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{4}mR^2$$

b) dopo l'urto l'energia del sistema si conserva perchè le forze esterne agenti su di esso sono conservative (forza peso) o non compiono lavoro (reazione del vincolo). L'energia cinetica, e di conseguenza la velocità angolare, è massima quando l'energia potenziale è minima, cioè quando la sporgenza A si trova, assieme al proiettile, nella posizione più bassa, ossia sulla verticale passante da o e verso il basso. Scegliendo lo zero dell'energia potenziale gravitazionale in o, la conservazione dell'energia tra la posizione iniziale e tale posizione si scrive:

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mgR = \frac{1}{2}I{\omega^2}_{max} - \frac{1}{2}mgR \qquad \Rightarrow \qquad {\omega^2}_{max} = \omega^2 + \frac{2mgR}{I}$$

---

05 - Una sbarretta omogenea di massa M , lunghezza l e larghezza e spessore trascurabili rispetto ad l può ruotare senza attrito attorno ad un asse orizzontale fisso situato nel suo estremo o. Inizialmente la sbarretta si trova in posizione orizzontale, come in figura. Viene lasciata libera e nell'istante in cui si trova in posizione verticale urta un corpo di massa m assimilabile ad un punto materiale , che si sta muovendo con velocità orizzontale $\vec{v}_o$ e che si conficca nel suo estremo libero. Determinare l'espressione di v_o , in funzione delle altre quantità sopra indicate, per la quale il sistema resta a riposo dopo l'urto.



Soluzione

Indichiamo con ω la velocità angolare della sbarretta quando si trova in posizione verticale ed ntroduciamo l'asse z perpendicolare al piano della figura ed uscente da essa,

Prima dell'urto sulla sbarretta agiscono la forza peso, conservativa, e la reazione vincolare dell'asse, che non compie lavoro. Si conserva dunque l'energia totale. Fissando in o il livello zero dell'energia potenziale della forza peso, la conservazione dell'energia si scrive (I essendo il momento d'inerzia della sbaretta rispetto all'asse z):

$0 = -Mg\frac{l}{2} + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad ; \quad I = \frac{1}{3}Ml^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{3\frac{g}{l}}$

L'unica quantità che si conserva durante l'urto è il momento angolare respetto ad o. Infatti il momento della reazione vincolare è nullo rispetto a tale punto, come pure quello della forza peso agente sulla sbarretta e sul proiettile, se la sbarretta resta in posizione verticale durante l'urto; i momenti delle forze interne tra sbarretta e proiettile si annullano reciprocamente. La quantità di moto invece non si conserva: la sua variazione è prodotta dalla reazione vincolare.

Prima dell'urto il momento angolare della sbarretta è diretto lungo z ed ha componente negativa, mentre quello del proiettile è diretto lungo z ed ha componente positiva. La componente z del momento angolare totale si scrive dunque :

$L_z = mv_ol - I\omega$

Dopo l'urto in generale il sistema si muove con velocità angolare ω' e la componente z del momento angolare è data da $L'_z = I'\omega'$ (I' essendo il momento d'inerzia del sistema sbaretta + proiettile rispetto all'asse z). La conservazione del momento angolare si scrive:

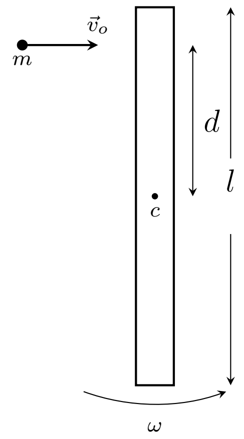
$L_z = L'_z$

Se il sistema è a riposo dopo l'urto ω' deve essere nullo, quindi devono essere nulli L'_z ed L_z ; L_z si annulla per:

$v_o = \frac{I\omega}{ml} = \frac{M}{m}\sqrt{\frac{gl}{3}}$

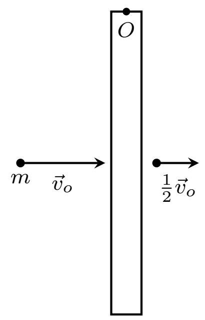
---

2 - Una sbarretta omogenea di massa M , lunghezza l e larghezza e spessore trascurabili rispetto ad l sta ruotando senza attrito attorno ad un asse orizzontale passante per il suo centro di massa c, in verso antiorario e con velocità angolare costante di modulo ω.
Un proiettile di massa m si conficca nella sbarretta, quando questa si trova in posizione verticale, in un punto distante d da c ; al momento dell'urto il proiettile ha velocità orizzontale $\vec{v}_o$. L'urto avviene in un tempo sufficientemente breve affinchè il sistema si trovi ancora in posizione verticale dopo che questi è avvenuto.
a) Calcolare, in funzione delle quantità sopra indicate, la velocità angolare del sistema subito dopo l'urto;
b) determinare il valore di d, in funzione delle altre quantità, per il quale il sistema rimane a riposo.



Soluzione
Scegliamo il verso dell'asse z perpendicolare al piamo della figura ed uscente da esso ed indichiamo con ω_f la componente z della velocità angolare del sistema subito dopo l'urto. Come in altri problemi analoghi, possiamo applicare la conservazione della componente z del momento angolare rispetto a c:
$I'\omega_f = I\omega - mv_o d$ (notare il segno del momento angolare del proiettile)
dove : $I = \frac{1}{12}M\ell^2$; $I' = \frac{1}{12}M\ell^2 + md^2$
Quindi:
$\omega_f = \frac{I\omega - mv_o d}{I'}$
ω_f si annulla per: $d = \frac{I\omega}{mv_o}$.
Bisognerebbe poi aggiungere la condizione che questo valore di d sia minore di $\frac{\ell}{2}$.

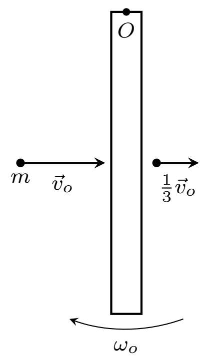
Una sbarretta omogenea di massa M , lunghezza $2l$ e larghezza e spessore trascurabili rispetto ad l può ruotare senza attrito attorno ad un asse orizzontale situato ad un suo estremo ed è inizialmente in quiete. Un proiettile di massa m con velocità orizzontale $\vec{v}_o$ la colpisce a distanza l da tale estremo e fuoriesce alla stessa quota con velocità $\frac{1}{2}\vec{v}_o$ e con massa invariata.
Trascurando la disomogeità prodotta dall'urto nella sbarretta:
a) calcolare la velocità angolare della sbarretta subito dopo l'urto;
b) calcolare il valore massimo raggiunto dopo l'urto dall'angolo che la sbarretta forma con la verticale.



Come in altri problemi analoghi, dobbiamo applicare la conservazione del momento angolare rispetto ad O, prestando attenzione al fatto che dopo l'urto il momento angolare sarà dato dalla somma di quello della sbarretta e di quello del proiettile.
a) Indicando con ω la velocità angolare della sbarretta subito dopo l'urto e con $I = \frac{1}{3}M4l^2$ il suo momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione, la conservazione del momento angolare rispetto ad O si scrive:
$mv_o l = \frac{1}{2}mv_o l + I\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{\frac{1}{2}mv_o l}{I} = \frac{3}{8}\frac{m}{M}\frac{v_o}{l}$.
b) Applichiamo la conservazione dell'energia meccanica. Ponendo il livello zero dell'energia potenziale della forza peso nella posizione iniziale del centro di massa della sbarretta ed indicando con θ_{max} l'angolo richiesto nel testo avremo:
$\frac{1}{2}I\omega^2 = Mgl(1 - \cos\theta_{max}) \quad \Rightarrow \quad \cos\theta_{max} = 1 - \frac{1}{2}\frac{I\omega^2}{Mgl}$
Notate che questa equazione, al variare di m, M, v_o può non avere soluzioni; in questo caso la sbarretta compirà un giro completo.

---

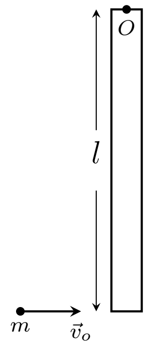
2 - Una sbarretta omogenea di massa M , lunghezza l e larghezza e spessore trascurabili rispetto ad l può ruotare senza attrito attorno ad un asse orizzontale passante per l'estremo O. In un istante in cui la sbarretta è in posizione verticale e ha velocità angolare di modulo ω_o come in figura, un proiettile di massa m con velocità orizzontale $\vec{v}_o$ la colpisce a distanza $\frac{1}{2}l$ da O e fuoriesce alla stessa quota con velocità $\frac{1}{3}\vec{v}_o$ e con massa invariata.
Trascurando la disomogeità prodotta dall'urto nella sbarretta:
a) calcolare la velocità angolare della sbarretta subito dopo l'urto;
b) scrivere , in funzione delle altre quantità date, il valore di v_o per il quale tale velocità angolare è nulla.



Stabiliamo un sistema di riferimento con origine in O ed asse z perpendocolare al piano della figura ed uscente dal foglio. Il momento angolare del sistema rispetto ad O è diretto lungo z e, come in altri problemi analoghi, si conserva.
Indicando con ω la velocità angolare della sbarretta subito dopo l'urto e con $I = \frac{1}{3}Ml^2$ il suo momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione, la conservazione del momento angolare rispetto ad O si scrive:
$mv_o\frac{l}{2} - I\omega_o = \frac{1}{3}mv_o\frac{l}{2} + I\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{\frac{1}{3}mv_o l}{I} - \omega_o$.
Notare che i momenti angolari del proiettile e della sbarretta prima dell'urto hanno verso opposto; il segno di ω può essere sia negativo, nel qual caso la sbarretta continua a ruotare nello stesso verso, che positivo e si annulla per $\omega_o = \frac{\frac{1}{3}mv_o l}{I} = \frac{mv_o}{Ml}$.

---

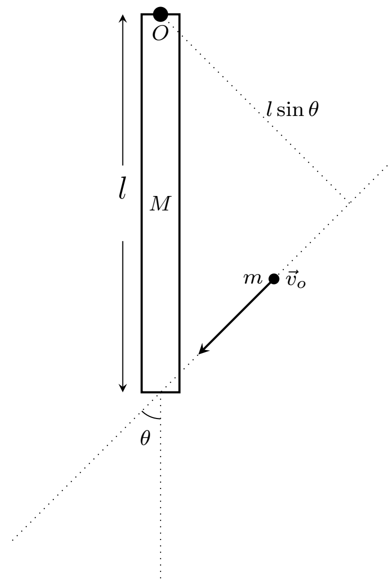
02 - Una sbarretta omogenea di massa M , lunghezza l e larghezza e spessore trascurabili rispetto ad l può ruotare senza attrito attorno ad un asse orizzontale situato nell'estremo O ed è inizialmente in quiete. Un proiettile di massa m si conficca nell'estremo inferiore della sbarretta e rimane solidale con essa. Prima dell'urto il proiettile ha velocità orizzontale $\vec{v}_o$; ipotizzando che l'urto avvenga in un intervallo di tempo molto breve in modo che si possa trascurare il moto della sbarretta:
a) Scrivere l'espressione della velocità angolare del sistema in funzione dell'angolo formato dalla sbarretta con la verticale e delle quantità date in precedenza.
b) Calcolare il valore minimo del modulo della velocità iniziale del proiettile, v_o, affinchè la sbarretta possa compiere un giro completo.



Soluzione
Il sistema è uguale a quello proposto nell'esercizio URTI-01 nel file degli esercizi, con $d = \frac{l}{2}$; si ha quindi:
$I = \frac{1}{3}Ml^2 + ml^2$
$r_{cm} = \frac{l}{2} + \frac{m}{m+M}\frac{l}{2}$
$\omega_o = \frac{mv_o}{I}l$
$\omega^2 = \omega^2{}_o - \frac{2}{I}r_{cm}(m+M)(1-\cos\theta)g$
$v_{omin} = \frac{2}{ml}\sqrt{Ir_{cm}(m+M)g}$

---

2 - Una sbarretta omogenea di massa M , lunghezza l e larghezza e spessore trascurabili rispetto ad l può ruotare senza attrito attorno ad un asse orizzontale ed è inizialmente in quiete. Un proiettile di massa m si conficca nell'estremo inferiore della sbarretta e rimane solidale con essa. Prima dell'urto il proiettile ha la velocità $\vec{v}_o$ rappresentata in figura; ipotizzando che l'urto avvenga in un intervallo di tempo molto breve in modo che si possa trascurare il moto della sbarretta:
a) Scrivere, in funzione delle quantità indicate in figura, l'espressione della velocità angolare del sistema subito dopo l'urto;
b) calcolare il valore minimo del modulo della velocità iniziale del proiettile, v_o, affinchè il sistema possa compiere un giro completo.



---

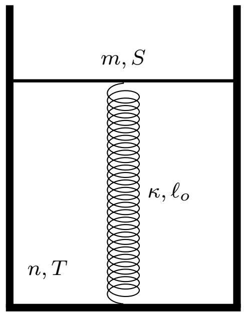
a) Il problema è simile ad altri svolti nella raccolta ; bisogna solo tener conto che il modulo del momento angolare iniziale de proiettile è dato da $mv_o l\sin\theta$ e che esso è perpendicolare al piano della figura ed entrante; scegliendo l'asse z nello stesso verso, la conservazione della componente z del momento angolare si scrive (indico con ω il modulo della velocità angolare del sistema dopo l'urto):
$mv_o l\sin\theta = I\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{1}{I}mv_o l\sin\theta \quad ; \quad I = \left(\frac{1}{3}M + m\right)l^2$
b) Fissiamo in O il livello zero dell'energia potenziale gravitazionale ed indichiamo con ω_o il valore di ω per il quale il sistema raggiunge la posizione verticale (rivolto verso l'alto) con velocità nulla. La conservazione dell'energia ci permette di calcolare ω_o:
$\frac{1}{2}I\omega_o^2 - mgl - Mg\frac{l}{2} = mgl + Mg\frac{l}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega_o^2 = \frac{1}{I}gl(4m+2M)$
Sostituendo l'espressione di ω ricavata in precedenza ricaviamo quella della velocità minima richiesta:
$v_{omin}^2 = \frac{I}{l\sin^2\theta}\frac{4m+2M}{m^2}g$

TERMODINAMICA

02 - Un contenitore a pareti adiabatiche è chiuso da un pistone, anch'esso adiabatico e disposto orizzontalmente, di massa M e sezione S; esso contiene n moli di gas perfetto alla temperatura T_1. Il sistema è in equilibrio; calcolare il volume del gas in funzione delle quantità date, dell'accelerazione di gravità e della costante R dei gas.
Successimante viene appoggiato al pistone un corpo di massa m e il pistone si muove lentamente verso un nuovo stato di equilibrio; calcolare il volume del gas nello stato finale e verificare che è minore di quello iniziale; calcolare la temperatura finale e verificare che è maggiore di quella iniziale.

Soluzione - La forza esercitata dal gas sul pistone è normale alla sua superficie, diretta verso l'esterno del contenitore ed ha modulo pS, dove p è la pressione del gas. Si ha l'equilibrio quando la risultante di tale forza e della forza peso è nulla. Poichè la trasformazione tra i due stati di equilibrio avviene lentamente, è reversibile e possiamo applicare l'equazione caratteristica della trasformazione adiabatica. Assegnando i pedici 1 e 2 agli stati iniziale e finale possiamo quindi scrivere:
Equilibrio del pistone nello stato iniziale : $p_1 S = Mg$
Equazione di stato nello stato iniziale: $p_1 V_1 = nRT_1$
Equilibrio del pistone nello stato finale : $p_2 S = (M+m)g$
Equazione di stato nello stato finale: $p_2 V_2 = nRT_2$
Equazione caratt. della trasf. adiabatica: $p_2 {V_2}^\gamma = p_1 {V_1}^\gamma$
Dalla prima e dalla seconda equazione: $V_1 = \frac{nRT_1}{p_1} = \frac{nRT_1 S}{Mg}$; dalla quinta, ed utilizzando la prima e la terza: $V_2 = V_1 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = V_1 \left(\frac{M}{M+m}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$
Dalle equazioni di stato ed utilizzando l' espressione di V_2 e di V_1: $T_2 = T_1 \left(\frac{p_2 V_2}{p_1 V_1}\right) = T_1 \left(\frac{M+m}{M}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}$
Poichè $\frac{1}{\gamma}$ e $1 - \frac{1}{\gamma}$ sono positivi, i fattori che moltiplicano V_1 e T_1 nelle ultime due espressioni sono rispettivamente minore e maggiore di 1.
La trasformazione lenta si può realizzare, ad esempio, mediante un cavo che lascia scendere lentamente il pistone o mediante l'attrito tra il pistone e le pareti del contenitore; in quest'ultimo caso il calore prodotto verrebbe disperso verso l'esterno perchè il contatto col gas è adiabatico. Se invece il pistone viene lasciato libero di scendere senza attrito il pistone oscillerebbe attorno ad una qualche posizione ma non potremmo applicare le equazioni precedenti perchè il gas non sarebbe in equilibrio termodinamico in ogni istante.

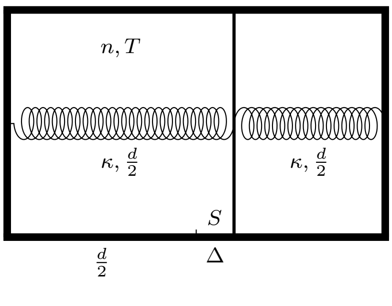
Un recipiente di sezione S è chiuso da un pistone orizzontale di sezione S e massa m che può scorrere senza attrito; una molla di lunghezza di riposo ℓ_o e costante elastica κ è vincolata ai suoi estremi alla base del recipiente ed al pistone. Il recipiente contiene n moli di gas perfetto a temperatura T ed il sistema è in equilibrio.
Calcolare il volume del recipiente in funzione delle quantità sopra indicate e discutere, al variare di m, i casi in cui la molla è allungata, compressa, o si trova alla lunghezza di riposo.
Trascurare la pressione atmosferica.



Introduciamo un asse x rivolto verso l'alto; le forze agenti sul pistone hanno solo componente lungo x. Indicando con h l'altezza del recipiente all'equilibrio e con p la pressione del gas, la condizione di equilibrio meccanico del pistone si scrive:
$pS - \kappa(h - \ell_o) - mg = 0$ (*) (notare i segni)
Dall'equazione di stato dei gas perfetti ricaviamo l'espressione della pressione in funzione di h:
$p = \frac{nRT}{V} = \frac{nRT}{Sh}$
Sostituendo questa espressione in (*) otteniamo un'equazione per h che ha per unica soluzione positiva:
$h = \frac{1}{2\kappa}\left[\kappa\ell_o - mg + \sqrt{(\kappa\ell_o - mg)^2 + 4\kappa nRT}\right]$ (**)
La molla è alla lunghezza di riposo quando la forza esercitata dal gas sul pistone equilibra la forza peso:
$pS = mg \quad \Rightarrow \quad m = \frac{nRT}{g\ell_o}$
Per valori maggiori della massa la molla deve essere evidentemente compressa, per valori minori deve essere allungata. Il tutto può essere verificato dalla (**); ad esempio, se per semplicità di calcolo sostituiamo $nRT = mg\ell_o$, la (**) si riduce a : $h = \ell_o$.

---

03 - Un recipiente di sezione S e larghezza d è diviso in due parti da un setto che può scorrere senza attrito. Il setto è collegato ai lati del recipiente da due molle ideali uguali di costante elastica κ e lunghezza di riposo $\frac{d}{2}$. La parte a sinistra contiene n moli di gas perfetto, quella a destra non contiene gas.
a) Calcolare la pressione del gas all'equilibrio in funzione dello spostamento del setto dalla posizione centrale (Δ in figura);
b) se il gas si trova a temperatura T, calcolare il volume del gas.

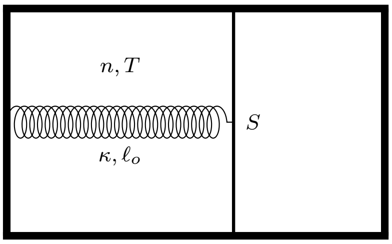


Soluzione
a) Δ è anche l'allungamento della molla di sinistra e la compressione di quella di destra; entrambe esercitano sul setto una forza diretta verso sinistra, di modulo $\kappa\Delta$. La risultante di queste due forze deve essere equilibrata dalla pressione esercitata dal gas sul setto; quindi:

$p = \frac{2\kappa\Delta}{S}$.
b) Il volume del gas è dato da: $V = \left(\frac{d}{2} + \Delta\right) S$ (*).
Sostituendo le espressioni precedenti di p e V nell'equazione di stato dei gas perfetti otteniamo un'equazione di secondo grado in Δ, che ha per soluzioni:
$\Delta = \frac{1}{2}\left[-\frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + 2\frac{nRT}{\kappa}}\right]$
la soluzione negativa è inaccettabile, perchè corrisponde ad una posizione del setto esterna al recipiente, quindi:
$\Delta = \frac{1}{2}\left[-\frac{d}{2} + \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + 2\frac{nRT}{\kappa}}\right]$
sostituendo in (*) si ricava il volume del gas.
Notate il valore di Δ per $n = 0$.

---

13 - Un recipiente di sezione S è diviso in due parti da un setto che può scorrere senza attrito ed è a contatto con un termostato a temperatura T. Nella parte a sinistra il setto è collegato ad una delle basi del recipiente da una molla ideale di costante elastica κ e lunghezza di riposo ℓ_o. La parte a sinistra contiene n moli di gas perfetto, quella a destra non contiene gas. Calcolare il volume del gas all'equilibrio.



Qui la lunghezza totale del recipiente non c'entra niente, contrariamente ad un esercizio simile che avete cercato di riprodurre; infatti non è data, quindi come è possibile che la soluzione dipenda da questa quantità ?
Detta h la lunghezza della parte di destra, l'equilibrio delle forze agenti sul pistone si scrive:
$\kappa(h - \ell_o) = pS$ (il gas esercita sul setto una forza diretta verso destra, la molla si deve allungare ed esercita una forza diretta verso sinistra).
L'equazione di stato ci da': $pS = \frac{nRT}{h}$; sostituendo nella prima equazione e risolvendo per h:
$h = \frac{1}{2}\left(\ell_o + \sqrt{\ell_o^2 + \frac{4nRT}{\kappa}}\right)$
Notate che la quantità sotto radice è maggiore di ℓ_o, quindi $h > l_o$ e l'altra soluzione è sicuramente negativa e quindi da scartare.

---

3 - n moli di gas perfetto sono inizialmente in equilibrio alla temperatura T in un recipiente chiuso da un pistone orizzontale di massa m e superficie S che può scorrere senza attrito. Viene appoggiato al pistone un blocchetto di massa M ed il gas esegue una trasformazione irreversibile verso un nuovo stato di equilibrio alla stessa temperatura T.
Calcolare pressione e volume del gas negli stati iniziale e finale e la quantità di calore da esso ceduta durante la trasformazione.
Trascurare la pressione atmosferica.

Soluzione

$p_i = \frac{mg}{S}$; $V_i = \frac{nRT}{p_i}$; $p_f = \frac{(m+M)g}{S} = \frac{m+M}{m}p_i$; $V_f = \frac{m}{m+M}V_i$
Se il volume diminuisce di $V_i - V_f$, il pistone si abbassa di $h = \frac{V_i - V_f}{S}$ e sul gas viene compiuto un lavoro $(m+M)gh$, quindi secondo la convenzione termodinamica il lavoro compiuto nella trasformazione è dato da $W = -(m+M)gh$. Poichè la temperatura finale è uguale a quella iniziale, la variazione di energia interna tra gli stati inziale e finale è nulla: $0 = Q - W \Rightarrow Q = W = -(m+M)gh$;
Q è negativo, infatti per restare alla stessa temperatura il gas deve cedere calore.

---

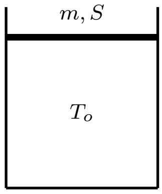
03 - Un recipiente adiabatico è chiuso da un pistone orizzontale, anch'esso adiabatico, di massa m e superficie S e contiene n moli di gas perfetto. Inizialmente il pistone è bloccato ed il gas è a temperatura T_o e volume V_o .
Il pistone viene sbloccato ed il gas esegue una trasformazione adiabatica reversibile, ad esempio mediante un meccanismo che fa scorrere lentamente il pistone, fino allo stato di equilibrio.
a) Determinare la condizione sulle quantità date per la quale il pistone si alza o si abbassa;
b) determinare pressione e volume del gas nello stato di equilibrio.

Soluzione

a) L'equazione di stato dei gas perfetti ci permette di calcolare la pressione del gas e quindi il modulo della forza esercitata dal gas sul pistone; tale forza è esercitata verso l'esterno del recipiente, cioè verso l'alto:
$p_o = \frac{nRT_o}{V_o}$; $f = p_o \cdot S$
Il pistone si alza per $f > mg$.
b) Nello stato di equilibrio la forza esercitata dal gas sul pistone e la forza peso si equilibrano:
$p_{fin} \cdot S = mg$
Ricavata p_{fin} da questa equazione, possiamo utilizzare l'equazione della trasformazione adiabatica reversibile $p_o V_o^\gamma = p_{fin} V_{fin}^\gamma$ per calcolare il volume finale.

---

3 - Un recipiente contiene n moli di gas perfetto ed è chiuso da un pistone orizzontale di massa m e superficie S che può scorrere senza attrito. Inizialmente il recipiente si trova in equilibrio, il pistone è nella posizione indicata in figura ed il gas è alla temperatura T_o.



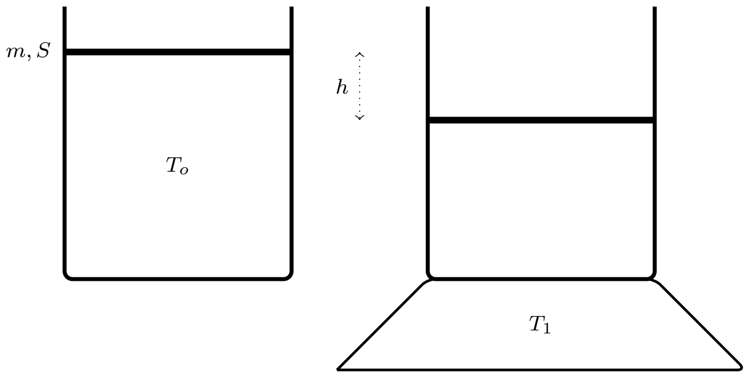
a) Calcolare il volume del gas;
b) viene fornita al gas la quantità di calore Q, lentamente in modo che il gas compia una trasformazione reversibile. Determinare il tipo di trasformazione e calcolare la temperatura ed il volume del gas al termine della trasformazione;
c) calcolare la variazione di energia interna e verificare la relazione di Mayer.
Trascurare la pressione atmosferica.

Soluzione

a) All'equilibrio il pistone è fermo, quindi la risultante delle forze agenti su di esso è nulla; se trascuriamo la pressione atmosferica, tali forze sono la forza peso, diretta verso il basso, e la forza esercitata dal gas, diretta verso l'alto. La condizione di equilibrio ci permette di calcolare la pressione p_o del gas: $p_o = \frac{mg}{S}$.
Ottenuto p_o, l'equazione di stato dei gas perfetti ci permette di ricavare il volume del gas: $V_o = \frac{nRT_o}{p_o}$
Se la trasformazione è reversibile, il gas ed il pistone sono istante per istante in equilibrio e la pressione è sempre p_o, quindi la trasformazione è isobara. Per tale trasformazione si ha (indichiamo con T la temperatura finale): $Q = nc_p(T - T_o) \quad \Rightarrow \quad T = T_o + \frac{Q}{nc_p}$
Le stesse considerazioni fatte al punto a) ci permettono di ricavare il volume finale del recipiente: $V = \frac{nRT}{p_o}$.
c) La variazione di energia interna tra due stati a temperatura T e T_o è sempre data da $nc_v(T - T_o)$, e, per il primo principio della termodinamica, è uguale al calore scambiato meno il lavoro compiuto dal gas. Quest'ultimo è dato da $p_o(V - V_o)$. Quindi si deve avere:
$nc_v(T - T_o) = Q - p_o(V - V_o) = nc_p(T - T_o) - nR(T - T_o)$
Dividendo questa relazione per $n(T - T_o)$ si ottiene la relazione di Mayer.

---

03 - Un recipiente adiabatico contiene n moli di gas perfetto ed è chiuso da un pistone anch'esso adiabatico di massa m e superficie S che può scorrere senza attrito. Inizialmente il gas è in equilibrio alla temperatura T_o.
Successivamente il gas viene posto a contatto con un termostato a temperatura $T_1 < T_o$ ed esegue una trasformazione irreversibile; nel nuovo stato di equilibrio il pistone si è abbassato di una quantità h ($h > 0$).
Calcolare la quantità di calore ceduta dal gas al termostato in funzione di h e delle quantità indicate in figura.

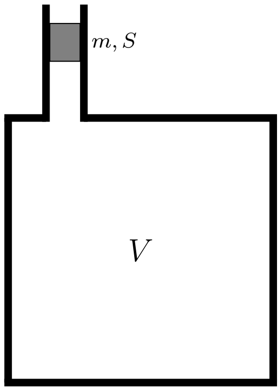


La forza peso applicata al pistone compie sul gas un lavoro di valore assoluto dato da mgh. Quindi, secondo la convenzione dei segni utilizzata nella formulazione del primo principio della termodinamica, il lavoro scambiato nella trasformazione (eseguito sul gas) è dato da:
$W = -mgh$
(Notiamo che non possiamo scrivere $W = -pSh$ perchè la trasformazone è irreversibile, qundi il gas non passa attraverso stati di equilibrio, quindi la pressione non è definita durante la trasformazione stessa).
Per lo stesso primo principio:
$\Delta U = Q - W = nc_V(T_1 - T_o) \quad \Rightarrow \quad Q = nc_V(T_1 - T_o) - mgh \quad (*)$
notare che entrambi gli addendi sono negativi.

Qual'è la differenza con una trasformazione reversibile ?
In una trasformazione irreversibile h dipende dai dettagli della trasformazione, può quindi variare. Il problema chiede solo di ricavare la relazione tra Q ed h.
Nella reversibile invece h ha un valore definito: la trasformazione reversibile avviene a pressione costante determinata dalle caratteristiche del pistone e data da $\frac{mg}{S}$. Quindi $Q = nc_p(T_1 - T_o)$; sostituendo questa espressione nella (*), possiamo ricavare h.
Per mostrare la coerenza di differenti impostazioni calcoliamo esplicitamente Q partendo dal primo principio:
$dQ = dU + dW = nc_V dT + pdV = nc_V dT + p\frac{nR}{p} dT = nc_p dT$
Come si realizza la trasformazione reversibile ? utilizzando un sistema che rallenti lo scambio di calore in modo che in ogni istante il gas raggiunga l'equilibrio.

---

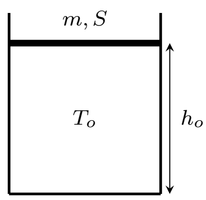
03 - Un serbatoio di volume $V = 100l$ è collegato come in figura ad un pistone disposto orizzontalmente di massa $m = 0.05kg$ e sezione $S = 2cm^2$; la forza di attrito statico massima tra il pistone e le pareti del recipiente è $F = 0.3N$. Il recipiente contiene $0.1mol$ di gas perfetto monoatomico ed è a contatto con un termostato alla temperatura $T = 270K$.
Il pistone è in equilibrio meccanico ? se la risposta è sì calcolare la quantità di calore che bisogna sottrarre al gas, tolto il contatto col termostato ed ipotizzando che il calore venga scambiato lentamente e a volume costante, perchè inizi a muoversi.
Trascurare la pressione atmosferica ed il volume del tubo in cui scorre il pistone.



Soluzione - La forza peso e la forza d'attrito hanno la stessa direzione verticale, la forza d'attrito può essere rivolta verso l'alto o verso il basso; il gas esercita sul pistone una forza diretta verso l'alto di modulo pS, dove p è la pressione. Introducendo un asse z verticale diretto verso il basso ed indicando con f_a la componente della forza d'attrito lungo z (può essere positiva o negativa) , la condizione d'equilibrio del pistone lungo z si scrive: $mg + f_a - pS = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{mg+f_a}{S}$.
f_a (attrito statico) può assumere tutti i valori compresi tra $-F$ ed F, quindi il pistone è in equilibrio per
$\frac{mg-F}{S} \leq p \leq \frac{mg+F}{S} \quad (*) \quad \Rightarrow$ (equazione di stato, $T = \frac{pV}{nR}$) $\frac{mg-F}{nRS}V \leq T \leq \frac{mg+F}{nRS}V$
Numericamente, ed utilizzando il valore molto approssimato $g \approx 10ms^{-2}$: $120K \leq T \leq 481K$. Quindi alla temperatura data il pistone è in equilibrio. Indicando con T_1 la temperatura di equilibrio inferiore, per portare il gas ad una temperatura minore di T_1 e far muovere il pistone dobbiamo sottrargli una quantità di calore maggiore di $nc_v(T - T_1)$.
Se volessimo tener conto della pressione atmosferica p_a, dovremmo aggiungere p_a ai due valori estremi in $(*)$.

---

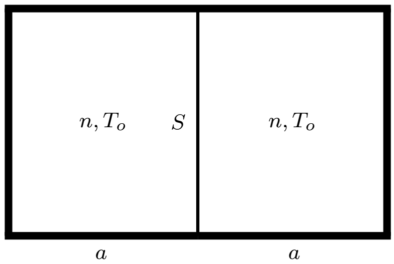
03 - Un recipiente adiabatico contiene n moli di gas perfetto ed è chiuso da un pistone anch'esso adiabatico di massa m e superficie S che può scorrere senza attrito. Inizialmente il recipiente si trova in equilibrio, il pistone è nella posizione indicata in figura ed il gas è alla temperatura T_o.
a) Calcolare l'altezza h_o indicata in figura.
b) Viene fornita al gas la quantità di calore Q, lentamente in modo che il gas compia una trasformazione reversibile e restando le pareti ed il pistone adiabatici (ad esempio mediante una resistenza posta nel recipiente). Determinare il tipo di trasformazione e calcolare la temperatura del gas e l'altezza del recipiente al termine della trasformazione.
c) Utilizzando i risultati di a) e b), verificare il primo principio della termodinamica.
Trascurare la pressione atmosferica.



Soluzione
a) All'equilibrio il pistone è fermo, quindi la risultante delle forze agenti su di esso è nulla; se trascuriamo la pressione atmosferica, tali forze sono la forza peso, diretta verso il basso, e la forza esercitata dal gas, diretta verso l'alto. La condizione di equilibrio ci permette di calcolare la pressione p_o del gas: $p_o = \frac{mg}{S}$.
Ottenuto p_o, l'equazione di stato dei gas perfetti ci permette di ricavare il volume del gas e l'altezza del recipiente:
$V = \frac{nRT_o}{p_o} \quad \Rightarrow \quad h_o = \frac{nRT_o}{mg}$
Se la trasformazione è reversibile, il gas ed il pistone sono istante per istante in equilibrio e la pressione è sempre p_o, quindi la trasformazione è isobara. Per tale trasformazione si ha (indichiamo con T la temperatura finale): $Q = nc_p\Delta T = nc_p(T - T_o) \quad \Rightarrow \quad T = T_o + \frac{Q}{nc_p}$
Le stesse considerazioni fatte al punto a) ci permettono di ricavare l'altezza finale del recipiente: $h = \frac{nRT}{mg}$.
c) Dobbiamo verificare che la variazione di energia interna è data dal calore scambiato meno il lavoro compiuto dal gas. La variazione di energia interna tra due stati a temperatura T e T_o è sempre data da $nc_v(T - T_o)$, mentre il lavoro compiuto dal gas per sollevare il pistone è dato da $p_oS(h - h_o)$. Quindi si deve avere:
$nc_v(T - T_o) = Q - p_oS(h - h_o) = nc_p(T - T_o) - nR(T - T_o)$
(per la seconda uguaglianza sostituiamo le espressioni di p_o, h, h_o ricavate in precedenza). Semplificando questa espressione otteniamo:
$c_v = c_p - R$
che, per la relazione di Mayer, costituisce un'identità.

---

3 - Un recipiente adiabatico di sezione S e lunghezza $2a$ è diviso in due parti da un setto di superficie S anch'esso adiabatico che può scorrere senza attrito; le due parti contengono ciascuna n moli di gas perfetto monoatomico. Inizialmente il sistema è all'equilibrio e i due gas si trovano alla stessa temperatura T_o.
Successivamente il gas a destra viene riscaldato lentamente (ad esempio mediante una resistenza elettrica) in modo che i due gas subiscano trasformazioni reversibili. Al termine del riscaldamento il setto si è spostato verso sinistra di una quantità d.
a) Calcolare la pressione dei due gas negli stati iniziale e finale in funzione delle quantità indicate in precedenza;
b) calcolare le temperature dei due gas nello stato finale in funzione delle stesse quantità (notare che non sono uguali).



Soluzione
a) Durante tutte le fasi del processo, quindi anche negli stati iniziale e finale, il sistema è in equilibrio, quindi la pressione delle due parti del gas deve essere la stessa (equilibrio meccanico del setto); durante il processo e nello stato finale le due parti non sono invece alla stessa temperatura, perchè il setto non permette lo scambio di calore.

Nello stato iniziale la temperatura delle due parti è la stessa, quindi devono essere uguali anche i volumi (equazione di stato); il setto deve dunque dividere il volume del recipiente in due parti uguali:
$V_i = Sa$ e $p_i = \frac{nRT_o}{V_i}$
Per calcolare la pressione nello stato finale dobbiamo osservare che la trasformazione è adiabatica per il gas a sinistra, mentre non lo è per quello a destra, in quanto esso viene riscaldato dalla resistenza. Per il gas a sinistra possiamo dunque scrivere l'equazione della trasformazione adiabatica:
$p_i\left(V_i\right)^\gamma = p_f\left(V_f\right)^\gamma \quad\Rightarrow\quad p_i\left(Sa\right)^\gamma = p_f\left(S(a-d)\right)^\gamma \quad\Rightarrow\quad p_f = p_i\left(\frac{a}{a-d}\right)^\gamma.$
b) Come detto in precedenza, p_f è anche la pressione del gas a destra nello stato finale, possiamo dunque applicare l'equazione di stato per ricavare le temperature delle due parti:
$T_s = \frac{p_f S(a-d)}{nR} = p_i\left(\frac{a}{a-d}\right)^\gamma \frac{S(a-d)}{nR} = \frac{nRT_o}{V_i}\left(\frac{a}{a-d}\right)^\gamma \frac{S(a-d)}{nR} = T_o\left(\frac{a}{a-d}\right)^\gamma \frac{a-d}{a} = T_o\left(\frac{a}{a-d}\right)^{\gamma-1}$
$T_d = \frac{p_f S(a+d)}{nR} = p_i\left(\frac{a}{a-d}\right)^\gamma \frac{S(a+d)}{nR} = \frac{nRT_o}{V_i}\left(\frac{a}{a-d}\right)^\gamma \frac{S(a+d)}{nR} = T_o\left(\frac{a}{a-d}\right)^\gamma \frac{a+d}{a}.$
Notiamo che T_s potrebbe anche essere ricavato applicando direttamente l'equazione della trasformazione adiabatica nella forma $TV^{\gamma-1} = cost.$

---

04 - Un gas perfetto esegue un ciclo reversibile a partire da un volume ed una pressione iniziali V_1 e p_1 . Il ciclo è costituito da:
1) una espansione isoterma fino ad un volume V_2;
2) una compressione isobara fino al volume V_1;
3) una trasformazione isocora che lo riporta nello stato iniziale.

a) Rappresentare il ciclo nel piano $p-V$.
b) Detta T_1 la temperatura iniziale, scrivere l'espressione di T_2, temperatura alla fine della compressione isobara, in funzione di T_1, V_1 e V_2.
c) Calcolare il rendimento del ciclo in funzione di T_1, T_2, V_1 e V_2.

Soluzione
b)Indicando con p_2 la pressione dell'isobara, scriviamo l'equazione di stato all'inizio ed al termine della trasformazione:
$p_2V_2 = nRT_1 \quad ; \quad p_2V_1 = nRT_2 \quad\Rightarrow\quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{V_1}{V_2}.$
c) Il calore assorbito ed il lavoro eseguito dal sistema nelle tre trasformazioni sono dati da:

$Q_1 = n\cdot R\cdot T_1 ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$	$W_1 = Q_1$	($Q_1 > 0:$ il sistema assorbe calore ed esegue un lavoro sull'esterno)
$Q_2 = n\cdot c_p\cdot(T_2-T_1) < 0$	$W_2 = p_2\cdot(V_1-V_2)$	($W_2 < 0:$ viene eseguito un lavoro sul sistema, che deve cedere calore per restare a
$Q_3 = n\cdot c_v\cdot(T_1-T_2)$	$W_3 = 0$	($Q_3 > 0:$ il sistema deve ricevere calore per aumentare la pressione a volume costan

Il rendimento del ciclo è il rapporto tra il lavoro netto compiuto dal sistema ed il calore assorbito dall'esterno:

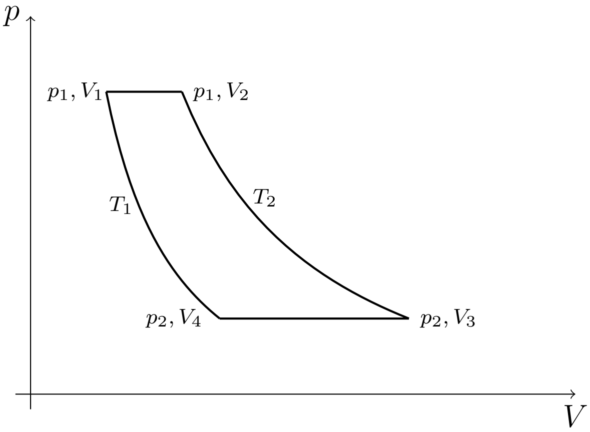
$$\eta = \frac{W_1+W_2}{Q_1+Q_3} = \frac{nRT_1 ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + p_2(V_1-V_2)}{nRT_1 ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + nc_v(T_1-T_2)} = \frac{nRT_1 ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + nR(T_2-T_1)}{nRT_1 ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + nc_v(T_1-T_2)}$$

---

05 - n moli di gas perfetto monoatomico si trovano in equilibrio in un recipiente adiabatico di volume fissato V alla temperatura T_1.
1) calcolare la pressione del gas p_1;
2) viene fornita al gas la quantità di calore Q, rimanendo il recipiente adiabatico e di volume V. Calcolare pressione e temperatura, p_2 e T_2 nel nuovo stato di equilibrio;
3) la parete orizzontale superiore del recipiente viene sostituita da un pistone di massa m e superficie S, anch'esso adiabatico, che può scorrere lentamente e senza attrito. Scrivere la condizione su m per la quale il gas si espande e calcolare pressione, volume e temperatura, p_3, V_3 e T_3, nel nuovo stato di equilibrio. Trascurare la pressione atmosferica.
Soluzione
1) Dall'equazione di stato dei gas perfetti: $p_1 = \frac{nRT_1}{V}$.
2) Per la definizione di calore specifico a volume costante : $Q = nc_v(T_2 - T_1) \quad ; \quad c_v = \frac{3}{2}R$, da cui ricaviamo T_2 e poi (equazione di stato) p_2:
$T_2 = T_1 + \frac{Q}{nc_v} \quad ; \quad p_2 = \frac{nRT_2}{V}$
3) le forze esercitate sul pistone sono: la forza peso, $m\vec{g}$, diretta verso il basso ; la forza esercitata dal gas sul pistone, di modulo p_2S, perpendicolare alla superficie e diretta verso l'alto. La condizione perchè esso si muova verso l'alto è dunque data da:
$m < \frac{p_2S}{g}$. Se il pistone si muove lentamente e senza attrito il gas esegue una trasformazione adiabatica reversibile. Nella posizione di equilibrio i moduli delle due forze devono essere uguali; questa condizione ci permette di ricavare p_3:
$p_3 = \frac{mg}{S}$
e l'equazione della trasormazione adiabatica permette di ricavare V_3: $p_2V^\gamma = p_3V_3{}^\gamma \quad\Rightarrow\quad V_3 = V\left(\frac{p_2}{p_3}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad ; \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}$
ed infine, dall'equazione di stato:
$T_3 = \frac{p_3V_3}{nR}$

---

06 - Un gas perfetto esegue un ciclo reversibile a partire da una pressione ed un volume iniziali p_1 e V_1 costituito da:
1) una espansione isobara fino ad un volume V_2;
2) una espansione isoterma fino ad un volume V_3;
3) una compressione isobara che lo porta alla temperatura iniziale;
4) una compressione isoterma che lo riporta nello stato iniziale.



a) calcolare le temperature T_1 e T_2 della due isoterme in funzione delle quantità date in precedenza;
b) calcolare il rendimento del ciclo in funzione delle quantità date in precedenza;
c) verificare che il rendimento è minore di quello di un ciclo di Carnot che operi tra le temperature T_1 e T_2.

Soluzione
a) $T_1 = \frac{P_1 V_1}{nR}$; $T_2 = \frac{P_1 V_2}{nR} > T_1$ (equazione di stato dei gas perfetti)
per i calcoli successivi serviranno inoltre le relazioni (equazione di stato dei gas perfetti):
$p_2 = \frac{nRT_2}{V_3}$; $\frac{V_1}{V_4} = \frac{V_2}{V_3}$; $p_1 \cdot (V_2 - V_1) = n \cdot R \cdot (T_2 - T_1)$; $p_2 \cdot (V_4 - V_3) = n \cdot R \cdot (T_1 - T_2)$ (*)
b) Il calore scambiato ed il lavoro eseguito nelle quattro fasi sono dati da:

$W_1 = p_1 \cdot (V_2 - V_1) > 0$ $\quad Q_1 = n \cdot c_p \cdot (T_2 - T_1) > 0$ (il gas esegue un lavoro sull'esterno ed assorbe calore)
$W_2 = n \cdot R \cdot T_2 ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right) > 0$ $\quad Q_2 = W_2 > 0$ (il gas esegue un lavoro sull'esterno ed assorbe calore)
$W_3 = p_2 \cdot (V_4 - V_3) < 0$ $\quad Q_3 = n \cdot c_p \cdot (T_1 - T_2) < 0$ (il gas subisce un lavoro dall'esterno e cede calore)
$W_4 = n \cdot R \cdot T_1 ln\left(\frac{V_1}{V_4}\right) < 0$ $\quad Q_4 = W_4 < 0$ (il gas subisce un lavoro dall'esterno e cede calore)

Il rendimento del ciclo è il rapporto tra il lavoro netto compiuto dal gas (quello eseguito sull'esterno meno quello subito) ed il calore assorbito dall'esterno:

$$\eta = \frac{W_1 + W_2 + W_3 + W_4}{Q_1 + Q_2} = \frac{p_1 \cdot (V_2 - V_1) + n \cdot R \cdot T_2 ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right) + p_2 \cdot (V_4 - V_3) + n \cdot R \cdot T_1 ln\left(\frac{V_1}{V_4}\right)}{n \cdot c_p \cdot (T_2 - T_1) + n \cdot R \cdot T_2 ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right)} = \frac{n \cdot R \cdot (T_2 - T_1) ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right)}{n \cdot c_p \cdot (T_2 - T_1) + n \cdot R \cdot T_2 ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right)}$$

per ottenere l'ultima uguaglianza abbiamo usato le (*).
c) Se il primo termine a denominatore fosse nullo, il rendimento sarebbe uguale a quello del ciclo di Carnot; poichè è invece positivo, il rendimento è minore.

---

07 - Un proiettile di piombo di massa m (si assumono noti il calore specifico c, la temperatura iniziale T_i e quella di fusione T_f) si conficca in un bersaglio di massa M inizialmente a riposo, sospeso ad una fune inestensibile di lunghezza l; al momento dell'urto esso ha velocità orizzontale. L'urto è completamente anelastico. Supponendo che durante l'urto tutta l'energia cinetica persa sia trasferita, sotto forma di calore, al solo proiettile:
a) determinare la velocità iniziale per cui esso fonde;
b) determinare la massima quota raggiunta dal sistema dopo l'urto.
Ipotizzare che durante l'urto la fune resti in posizione verticale e trascurare il calore latente di fusione.
Soluzione
a) Ipotizzando che durante l'urto la fune resti in posizione verticale, le forze esterne agenti sul sistema sono dirette lungo la vertcale, quindi si conserva la componente orizzontale della quantità di moto, che avrà la stessa direzione della velocità iniziale del proiettile. Siamo quindi nel caso di un urto frontale completamente anelastico in cui si conserva la quantità di moto; la variazione di energia cinetica è data da (con ovvio significato dei simboli):
$E_{k_f} - E_{k_i} = -\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)^2 = -\frac{1}{2}\mu(v_1 - v_2)^2$
dove μ è la massa ridotta del sistema; nel nostro caso la velocità iniziale del bersaglio è nulla; sostituendo i valori dati dal problema ed indicando con v_o la velocità iniziale del proiettile :
$E_{k_f} - E_{k_i} = -\frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}{v_o}^2 = -\frac{1}{2}\mu {v_o}^2$
La quantità di calore necessaria affinchè il proiettile raggiunga la temperatura di fusione è data da:
$Q = mc(T_f - T_i)$
e questa deve uguagliare la diminuzione di energia cinetica:
$mc(T_f - T_i) = E_{k_i} - E_{k_f} = \frac{1}{2}\mu {v_o}^2 \quad \Rightarrow \quad {v_o}^2 = 2\frac{m}{\mu}c(T_f - T_i)$
b) Il modulo della velocità del sistema subito dopo l'urto sarà dato da (conservazione della quantità di moto):
$v = \frac{m}{m+M}v_o$
Dopo l'urto si conserva l'energia meccanica:
$(m + M)gh_{max} = \frac{1}{2}(m + M)v^2$
dove h_{max} è l'elevazione rispetto alla quota iniziale del bersaglio.

---

08 - n moli di un gas perfetto, di calore specifico a volume costante c_v, sono contenute in un recipente adiabatico chiuso da un pistone di superficie S che può scorrere senza attrito. All'equilibrio il gas occupa il volume V_1 e la sua temperatura è T_1.
a) Calcolare la massa del pistone;

b) il recipiente viene successivamente posto a contatto termico con un solido di massa M e calore specifico c che si trova alla temperatura $T_2 > T_1$; lo scambio di calore avviene abbastanza lentamente perchè la trasformazione possa essere considerata reversibile. Calcolare, in funzione delle quantità date in precedenza, la temperatura finale di equilibrio dei due corpi ed il volume finale del gas.

Trascurare la pressione atmosferica.

Soluzione

a) Indicando con m la massa del pistone, la pressione esercitata dal pistone sul gas (trascurando la pressione atmosferica) è $p = \frac{mg}{S}$; all'equilibrio la relazione tra p, V_1 e T_1 è la legge dei gas perfetti, quindi:

$m = \frac{nRT_1S}{gV_1}$

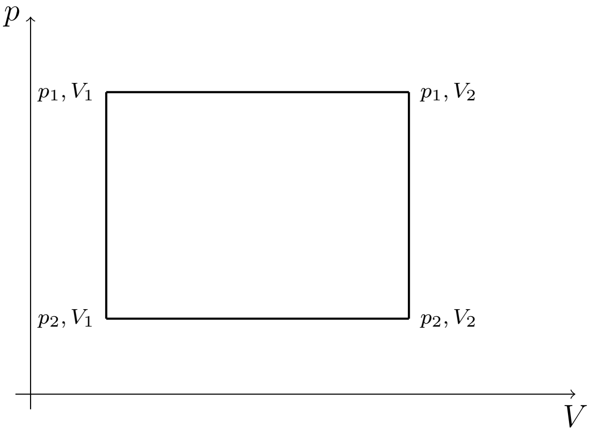
b) Se la trasformazione avviene attraverso stati di equilibrio, la pressione del gas è sempre determinata dalla massa del pistone, quindi è costante ed è uguale a p. Indicando con T_f la temperatura finale, la quantità di calore ceduto dal solido è $Mc\,(T_2 - T_f)$ e quello ricevuto dal gas $nc_p\,(T_f - T_1) = n(c_v + R)\,(T_f - T_1)$ (relazione di Mayer). Uguagliando le due quantità si ottiene un'equazione nell'incognita T_f dalla quale si ricava:

$T_f = \frac{McT_2 + n(c_v+R)T_1}{Mc + n(c_v+R)}$

b') In alternativa, potremmo scrivere la variazione di energia interna del gas tra lo stato iniziale e quello finale ed uguagliarlo al calore ricevuto dal solido meno il lavoro compiuto (primo principio dellla termodinamica). Quest'ultimo, poichè l'espansione avviene a pressione costante ed indicando con V_f il volume finale, è dato da : $p\,(V_f - V_1) = nR\,(T_f - T_1)$. Quindi:

$nc_v\,(T_f - T_1) = Mc\,(T_2 - T_f) - nR\,(T_f - T_1)$

che porta ovviamente allo stesso risultato.



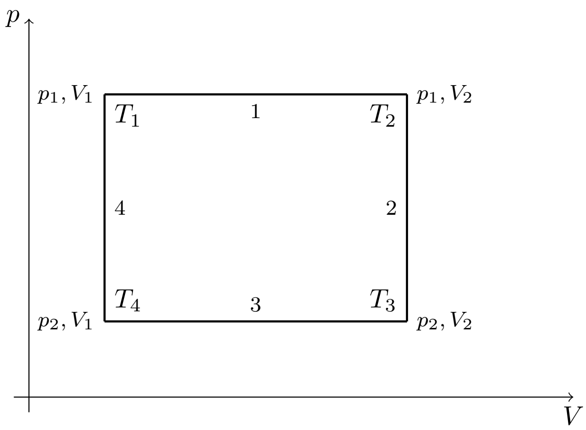
09 - n moli di un gas perfetto eseguono il ciclo reversibile rappresentato in figura, costituito da due trasformazioni isocore e due isobare.

a) Calcolare le temperature minima e massima del gas durante il ciclo in funzione delle quantità indicate in figura e dei calori specifici c_p e c_v;

b) dimostrare che il rendimento del ciclo è dato da:

$$\eta = \frac{R}{c_p \frac{p_1}{p_1 - p_2} + c_v \frac{V_1}{V_2 - V_1}}.$$

Soluzione



In figura abbiamo numerato le quattro trasformazioni ed indicato le temperature ai quattro vertici del ciclo.

a) $T_2 = \frac{P_1 V_2}{nR}$ è la temperatura massima , perchè in quel punto sia p che V assumono il valore massimo. Analogamente T_4 è la temperatura minima.

b) Il calore scambiato ed il lavoro eseguito nelle quattro trasformazioni sono dati da:

$W_1 = p_1 \cdot (V_2 - V_1) > 0$	$Q_1 = n \cdot c_p \cdot (T_2 - T_1) > 0$	(il gas esegue un lavoro sull'esterno ed assorbe calore)
$W_2 = 0$	$Q_2 = n \cdot c_v \cdot (T_3 - T_2) < 0$	($W_2 = 0$ perchè il volume resta costante e il gas deve cedere calore affinchè la p
$W_3 = p_2 \cdot (V_1 - V_2) < 0$	$Q_3 = n \cdot c_p \cdot (T_4 - T_3) < 0$	(il gas subisce un lavoro dall'esterno e deve cede calore affinchè la pressione rest
$W_4 = 0$	$Q_4 = n \cdot c_v \cdot (T_1 - T_4) > 0$	($W_2 = 0$ perchè il volume resta costante e il gas deve assorbire calore affinchè la

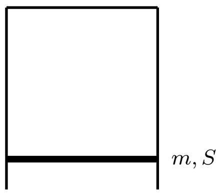
Il rendimento del ciclo è il rapporto tra il lavoro netto compiuto dal gas (quello eseguito sull'esterno meno quello subito) ed il calore assorbito dall'esterno:

$$\eta = \frac{W_1 + W_3}{Q_1 + Q_4} = \frac{p_1 \cdot (V_2 - V_1) + p_2 \cdot (V_1 - V_2)}{n \cdot c_p \cdot (T_2 - T_1) + n \cdot c_v \cdot (T_1 - T_4)} = \frac{(p_1 - p_2)(V_2 - V_1)}{n \cdot c_p \cdot \frac{p_1(V_2 - V_1)}{nR} + n \cdot c_v \cdot \frac{V_1(p_1 - p_2)}{nR}} = \frac{R}{c_p \frac{p_1}{p_1 - p_2} + c_v \frac{V_1}{V_2 - V_1}}$$

per ottenere la penultima uguaglianza abbiamo utilizzato l'equazione di stato dei gas perfetti.

---

10 - Un recipiente adiabatico contiene n moli di gas perfetto ed è chiuso da un pistone anch'esso adiabatico di massa m e superficie S che può scorrere senza attrito. Inizialmente il recipiente si trova nella posizione indicata in figura ed il gas è alla temperatura T_i. Indicando con p_o la pressione atmosferica, calcolare la pressione del gas ed il suo volume.



Il recipiente viene rapidamente rovesciato in modo che il pistone sia rivolto verso l'alto ed orizzontale; successivamente il pistone si muove lentamente verso la nuova posizione di equilibrio. Calcolare temperatura, pressione e volume del gas nello stato finale.

Soluzione

Nella posizione iniziale sul pistone si esercitano tre forze: quella dovuta alla pressione atmosferica, diretta verso l'alto, quella dovuta alla pressione esercitata dal gas, diretta verso l'esterno del recipiente, quindi verso il basso, e la forza peso, ovviamente verso il basso. Quindi, utilizzando i pedici i ed f per le quantità iniziali e finali del gas:

$p_oS = p_iS + mg \quad \Rightarrow \quad p_i = p_o - \frac{mg}{S}$

Nello stato finale si invertono i versi delle forze dovute alla pressione atmosferica ed a quella esercitata dal gas:

$-p_oS = -p_fS + mg \quad \Rightarrow \quad p_f = p_o + \frac{mg}{S}$

Data T_i, l'equazione di stato dei gas perfetti ci permette di calcolare V_i: $\quad V_i = \frac{nRT_i}{p_i}$

Dopo che il recipiente viene rovesciato, il pistone scende verso il basso verso la nuova posizione di equilibrio, quindi viene compiuto del lavoro sul gas e poichè non vi è scambio di calore, l'energia interna del gas aumenta e quindi aumenta anche la sua temperatura. Se il movimento avviene lentamente, la trasformazione passa da stati di equilibrio e possiamo applicare le equazioni della trasformazione adiabatica per calcolare T_f e V_f:

$p_i{V_i}^\gamma = p_f{V_f}^\gamma \quad \Rightarrow \quad V_f = V_i\left(\frac{p_i}{p_f}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad ; \quad T_i{V_i}^{\gamma-1} = T_f{V_f}^{\gamma-1} \quad \Rightarrow \quad T_f = T_i\left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma-1} = T_i\left(\frac{p_i}{p_f}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$

---

11 - Un gas perfetto si espande a temperatura costante eseguendo una trasformazione reversibile fino a raddoppiare il suo volume. Si calcoli il lavoro compiuto dal sistema nella trasformazione descritta e si determini la frazione di calore assorbito convertita in lavoro. Si dica infine se, nel processo descritto, si viola il secondo principio della termodinamica, motivando la risposta.

Soluzione

Il lavoro compiuto da n moli di gas perfetto in una espansione isoterma alla temperatura T dal volume iniziale V_i a quello finale V_f è dato da:

$W = nRT\ln\frac{V_f}{V_i} =$ (nel nostro caso) $= nRT\ln(2) > 0$

riprendere e rifare la dimostrazione.

Poichè il gas resta alla stessa temperatura deve essere a contatto con una sorgente a temperatura fissata (termostato) da cui assorbe una quantità di calore $\quad Q = W \quad$ (primo principio della termodinamica; l'energia interna di un gas perfetto dipende solo dalla temperatura, quindi resta costante nella trasformazione).

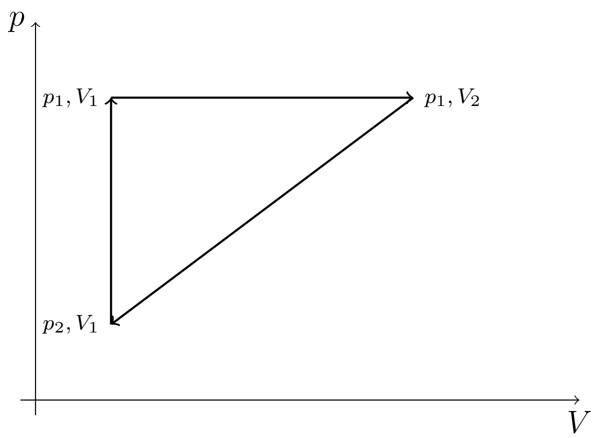
Il calore assorbito è stato integralmente trasformato in calore (la frazione è quindi 1) ed il volume del gas è variato. Ciò non è in contradizione col secondo principio, che nella formulazione di Kelvin-Plank afferma:

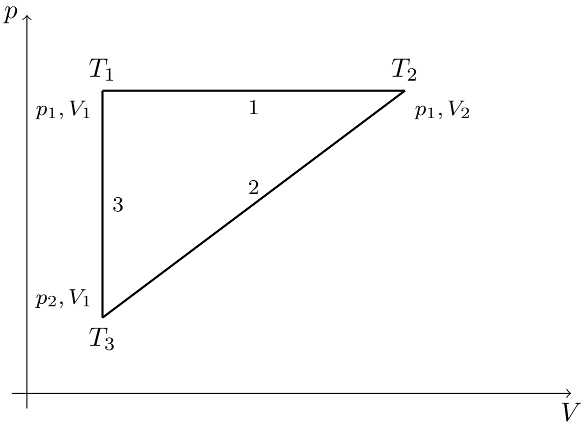
È impossibile realizzare una trasformazione il cui **unico** risultato sia la trasformazione in lavoro di tutto il calore ricevuto da una unica sorgente a temperatura fissata.

Infatti nel nostro caso la trasformazione in lavoro di tutto il calore ricevuto non è l'unico risultato della trasformazione, perchè il volume è cambiato.

---

12 - n moli di un gas perfetto eseguono il ciclo reversibile rappresentato in figura, percorso in verso orario a partire dal vertice (p_1, V_1). Calcolare il rendimento del ciclo in funzione delle quantità date in figura e dei calori specifici del gas; verificare che tale rendimento è minore di 1.

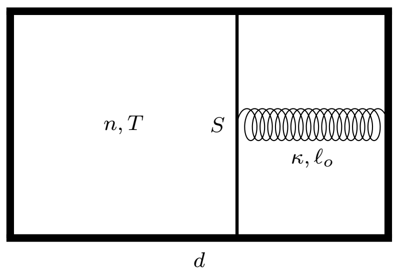




Soluzione
In figura abbiamo numerato le tre trasformazioni che compongono il ciclo ed indicato le temperature ai suoi vertici.
$T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR}$; $T_2 = \frac{p_1 V_2}{nR}$; $T_3 = \frac{p_2 V_1}{nR}$.
Per le trasformazioni 1 (isobara) e 3 (isocora) il calore scambiato ed il lavoro eseguito sono dati da:
$W_1 = p_1(V_2 - V_1) > 0 \quad ; \quad Q_1 = nc_p(T_2 - T_1) > 0$
$W_3 = 0 \quad ; \quad Q_3 = nc_v(T_1 - T_3) > 0$
Per la trasformazione 2 il lavoro compiuto si può calcolare come superficie della regione sotto la curva (trapezio), col segno meno perchè la trasformazione è percorsa dal vertice a temperatura T_2 a quello a temperatura T_3 ed il lavoro è negativo perchè eseguito sul sistema; le basi del trapezio sono p_2 e p_1, l'altezza è $V_2 - V_1$:
$W_2 = -\frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_2 - V_1) < 0$
In alternativa si può scrivere l'equazione della retta passante dai due vertici, $p(V)$, e calcolare il lavoro come $\int_{V_2}^{V_1} p(V)\, dV$
Il calore scambiato si può ricavare calcolando la variazione di energia interna:
$\Delta U_2 = Q_2 - W_2 = nc_v(T_3 - T_2) < 0 \quad ; \quad Q_2 = \Delta U_2 + W_2 < 0$
Osserviamo che Q_2 deve essere negativo perchè il gas viene compresso (in assenza di scambio di calore la temperatura aumenterebbe) e la sua temperatura diminuisce.
$\eta = \frac{W_1 + W_2}{Q_1 + Q_3} = \frac{p_1(V_2 - V_1) - \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_2 - V_1)}{nc_p(T_2 - T_1) + nc_v(T_1 - T_3)} = \frac{\frac{1}{2}(p_1 - p_2)(V_2 - V_1)}{nc_p(T_2 - T_1) + nc_v(T_1 - T_3)}$
Osserviamo nell'ultima espressione che il lavoro a numeratore è la superficie della regione racchiusa dal ciclo.
Per verificare che η è minore di 1 applichiamo nella penultima espressione l'equazione di stato a numeratore e la relazione di Mayer a denominatore:
$\eta = \frac{nR(T_2 - T_1) - \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_2 - V_1)}{nc_v(T_2 - T_1) + nR(T_2 - T_1) + nc_v(T_1 - T_3)}$
e osserviamo che a numeratore e a denominatore compare lo stesso termine $nR(T_2 - T_1)$ sommato a quantità negative a numeratore e positive a denominatore.

---

13 - Un recipiente di sezione S e lunghezza d è diviso in due parti da un setto che può scorrere senza attrito ed è a contatto con un termostato a temperatura T. Nella parte a destra il setto è collegato ad una delle basi del recipiente da una molla di costante elastica κ e lunghezza di riposo ℓ_o. La parte a sinistra contiene n moli di gas perfetto, quella a destra non contiene gas. Calcolare il volume del gas all'equilibrio. Ottenuto il risultato, discutere il caso in cui non vi sia gas nella parte a sinistra ($n = 0$) e quello in cui la molla sia totalmente rigida ($\kappa \to \infty$).



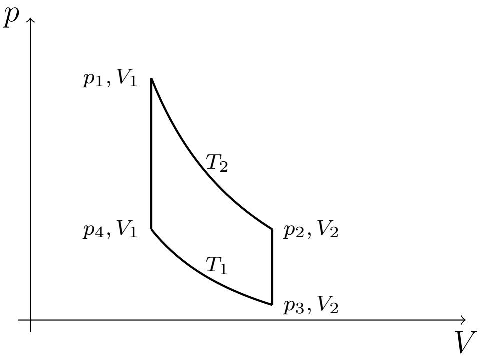
Soluzione - Indichiamo con h la lunghezza della parte di sinistra all'equilibrio; l'equazione di stato dei gas perfetti ci permette di scrivere l'espressione della pressione p del gas: $p = \frac{nRT}{Sh}$
Tale pressione si esercita verso l'esterno del recipiente, quindi il gas esercita sul setto una forza di modulo pS diretta verso destra e la molla viene compressa. Indicando con ℓ la lunghezza della molla si ha: $\ell = d - h$
La molla esercita dunque sul setto un forza diretta verso sinistra di modulo: $F = \kappa(\ell_o - \ell) = \kappa(\ell_o - d + h)$. All'equilibrio: $F = pS$
Sostituendo in quest'ultima le espressioni di F e di p si ottiene un'equazione per h che ha una sola soluzione positiva:
$h = \frac{1}{2}\left[(d - \ell_o) + \sqrt{(d - \ell_o)^2 + 4\frac{nRT}{\kappa}}\right]$ (la soluzione negativa non ha significato fisico).
In entrambi i casi proposti nel testo si ha: $h = d - \ell_o$ cioè la molla, come ci aspettiamo, rimane nella sua posizione di riposo.

---

14 - Un recipiente adiabatico è chiuso da un pistone orizzontale, anch'esso adiabatico, di massa m e superficie S e contiene n moli di gas perfetto. Inizialmente il pistone è bloccato ed il gas è a temperatura T_o, pressione p_o e volume V_o ($p_o > \frac{mg}{S}$) .
Il pistone viene sbloccato, si solleva di una quantità d ed il gas raggiunge un nuovo stato di equilibrio.
a) Scrivere l'espressione della variazione di energia interna e della temperatura finale in funzione di d e delle altre quantità date in precedenza.
b) Determinare d in funzione delle altre quantità date.
Soluzione
Indichiamo le quantità nello stato finale col pedice f.
a) Nel passaggio dallo stato iniziale a quello finale il gas non scambia calore con l'esterno perchè il recipiente è adiabatico e compie sull'esterno il lavoro necessario a sollevare il pistone, quindi la variazione di energia interna è data da:
$\Delta U = -mgd = nc_v(T_f - T_o) \qquad \Rightarrow \qquad T_f = T_o - \frac{mgd}{nc_v}$

b) $\quad V_f = V_o + Sd \quad ; \quad p_f = \frac{mg}{S}$ (Quest'ultima è la condizione di equilibrio nello stato finale).
Sostituendo p_f, V_f e T_f nell'equazione di stato si ottiene un'equazione nell'incognita d:
$\frac{mg}{S}(V_o + Sd) = nR(T_o - \frac{mgd}{nc_v}) \quad \Rightarrow \quad d = \frac{nRT_o - \frac{mg}{S}V_o}{mg(1+\frac{R}{c_v})}$

Attenzione: in questo caso non è possibile utilizzare l'equazione della trasformazione adiabatica perchè la trasformazione in esame non passa attraverso stati di equilibrio. Il passaggio attraverso stati di equilibrio si avrebbe modificando lentamente la massa del pistone da $\frac{p_o S}{g}$ ad m, ed ovviamente il lavoro compiuto dal gas risulterebbe diverso da quello calcolato sopra.



Esercizio 3 - n moli di gas perfetto eseguono a partire da una pressione ed un volume iniziali p_1 e V_1 il ciclo reversibile rappresentato in figura e costituito da due isoterme e due isocore.
a) calcolare V_2 in funzione di p_1, p_2 e V_1;
b) calcolare il rendimento del ciclo in funzione delle quantità indicate in figura;
c) verificare che il rendimento è minore di quello di un ciclo di Carnot che operi tra le temperature T_1 e T_2.

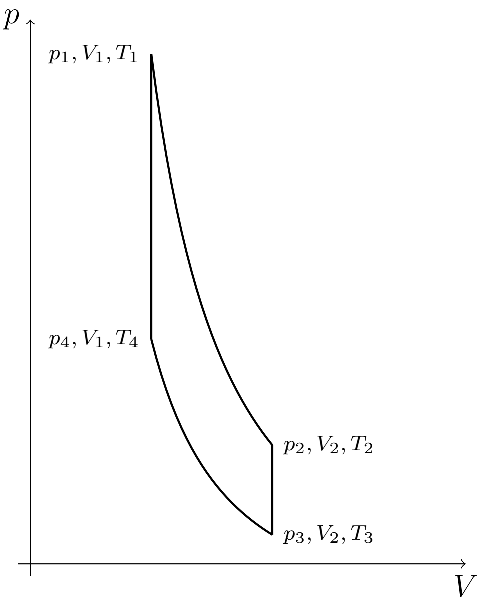
Soluzione
a) $P_1V_1 = p_2V_2 \quad \Rightarrow \quad V_2 = V_1\frac{p_1}{p_2}$ (i due stati stanno su un'isoterma)
b) Il calore scambiato ed il lavoro eseguito nelle quattro fasi del ciclo sono dati da:

$W_1 = n \cdot R \cdot T_2 ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) > 0$	$Q_1 = W_1 > 0$	(il gas esegue un lavoro sull'esterno ed assorbe calore)
$W_2 = 0$	$Q_2 = nc_v(T_1 - T_2) < 0$	(il gas non compie lavoro e deve cedere calore perché la pressione diminuisca)
$W_3 = n \cdot R \cdot T_1 ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) < 0$	$Q_3 = W_3 < 0$	
$W_4 = 0$	$Q_4 = nc_v(T_2 - T_1) > 0$	

Il rendimento del ciclo è il rapporto tra il lavoro netto compiuto dal gas ed il calore assorbito:

$$\eta = \frac{W_1 + W_2 + W_3 + W_4}{Q_1 + Q_4} = \frac{n \cdot R \cdot T_2 ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + n \cdot R \cdot T_1 ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)}{n \cdot R \cdot T_2 ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + nc_v(T_2 - T_1)} = \frac{n \cdot R \cdot T_2 ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) - n \cdot R \cdot T_1 ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}{n \cdot R \cdot T_2 ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + nc_v(T_2 - T_1)}$$

c) Se il secondo termine a denominatore fosse nullo, il rendimento sarebbe uguale a quello del ciclo di Carnot; poiché è invece positivo, il rendimento è minore.



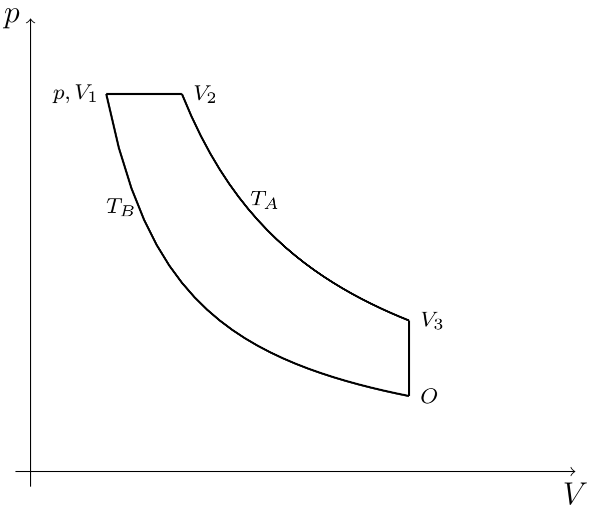
3 - n moli di gas perfetto eseguono a partire da una pressione ed un volume iniziali p_1 e V_1 il ciclo reversibile rappresentato in figura e costituito da due adiabatiche e due isocore (ciclo Otto).
Calcolare il rendimento del ciclo in funzione delle quantita indicate in figura e dimostrare, mediante le equazioni delle trasformazioni adiabatiche, che tale rendimento è uguale a $1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_3}{T_4}$.

Soluzione
Il sistema compie lavoro durante la prima trasformazione adiabatica mentre durante la seconda l'ambiente esterno compie lavoro sul sistema. In entrambi i casi $\Delta U = nc_v\Delta T = -W$ (variazione di energia interna tra due stati dei quali sono note le temperature e primo principio della termodinamica). Quindi il lavoro netto durante il ciclo è dato da:
$W = -nc_v(T_2 - T_1) - nc_v(T_4 - T_3)$
Il calore scambiato è nullo durante le adiabatiche, negativo durante la prima isocora (la pressione diminuisce a volume costante, quindi il sistema deve cedere calore) e positivo durante la seconda. Quindi il calore ricevuto dal sitema è dato da:
$Q = nc_v(T_1 - T_4)$.
Il rendimento è dunque dato da: $\eta = \frac{W}{Q} = 1 - \frac{T_2 - T_3}{T_1 - T_4}$

per scrivere in modo più compatto tale rendimento possiamo utilizzare le equazioni delle due adiabatiche reversibili:

$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \quad ; \quad T_4 V_1^{\gamma-1} = T_3 V_2^{\gamma-1} \quad \Rightarrow \quad T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \quad ; \quad T_3 = T_4 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \quad ; \quad \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4}$

Quindi: $\eta = 1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_3}{T_4}$



Un gas perfetto esegue il ciclo reversibile rappresentato in figura; il ciclo parte da una pressione ed un volume iniziali p e V_1 ed è costituito da un'espansione isobara, una isoterma, una trasformazione isocora ed una compressione isoterma.

a) Calcolare la pressione del gas nel punto O del ciclo;

b) calcolare il rendimento del ciclo in funzione delle quantità indicate in figura;

c) dimostrare che tale rendimento è minore di 1.

---

a) $p_O = \frac{nRT_B}{V_3}$

b) Numerando progressivamente le 4 fasi del ciclo, il lavoro compiuto ed il lavoro scambiato in tali fasi sono dati da:

$W_1 = p(V_2 - V_1) > 0 \quad ; \quad Q_1 = nc_p(T_A - T_B) > 0$

$W_2 = nRT_A \ln \frac{V_3}{V_2} > 0 \quad ; \quad Q_2 = W_2 > 0$

$W_3 = 0 \quad ; \quad Q_3 = nc_v(T_B - T_A) < 0$

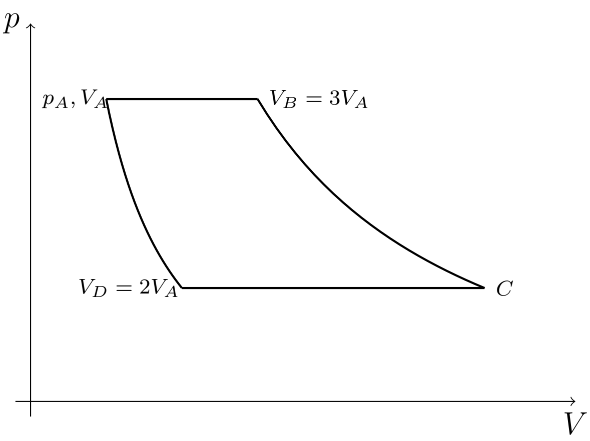
$W_4 = nRT_B \ln \frac{V_1}{V_3} < 0 \quad ; \quad Q_4 = W_4 < 0$

quindi $\eta = \frac{W_1 + W_2 + W_4}{Q_1 + Q_2} = \frac{p(V_2 - V_1) + nRT_A \ln \frac{V_3}{V_2} + nRT_B \ln \frac{V_1}{V_3}}{nc_p(T_A - T_B) + nRT_A \ln \frac{V_3}{V_2}}$

c) Confrontiamo i termini delle somme a numeratore e a denominatore:

$p(V_2 - V_1) = nR(T_A - T_B) < nc_p(T_A - T_B)$ (equazione di stato e relazione di Mayer)

i secondi termini sono uguali e a numeratore c'è un ulteriore termine negativo.



03 - Un gas perfetto biatomico esegue un ciclo reversibile a partire da una pressione ed un volume iniziali p_A e V_A costituito da:

1) una espansione isobara fino ad un volume $V_B = 3V_A$;

2) una espansione adiabatica fino allo stato C;

3) una compressione isobara fino ad un volume $V_D = 2V_A$;

4) una compressione adiabatica che lo riporta nello stato iniziale.

calcolare il rendimento del ciclo in funzione delle quantità date in precedenza.

Soluzione

Poichè il calore scambiato nelle adiabatiche è nullo, conviene scrivere il lavoro compiuto dal sistema in termini di calore scambiato:

$W = Q_{AB} + Q_{CD}$

Il calore scambiato nelle due isobare è dato da:

$Q_{AB} = nc_p(T_B - T_A) \quad ; \quad Q_{CD} = nc_p(T_D - T_C)$

notiamo che Q_{AB} è positivo e Q_{CD} è negativo. Quindi il rendimento del ciclo è dato da:

$\eta = \frac{W}{Q_{AB}} = 1 + \frac{Q_{CD}}{Q_{AB}} = 1 + \frac{T_D - T_C}{T_B - T_A}$

Dobbiamo ora usare le equazioni delle due adiabatiche per ricavare le relazioni tra le temperature:

$P_A V_A^{\gamma} = P_D V_D^{\gamma} \quad ; \quad P_A V_B^{\gamma} = P_D V_C^{\gamma} \quad \Rightarrow \quad V_C = 3V_D$

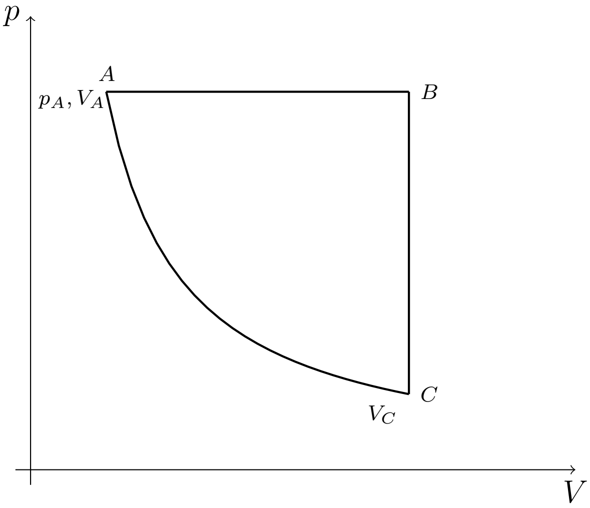
ed usando l'equazione di stato:

$T_B = 3T_A \quad ; \quad T_C = 3T_D \quad \Rightarrow \quad \eta = 1 - \frac{T_D}{T_A} = 1 - \left(\frac{V_A}{V_D}\right)^{\gamma-1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma-1}$

Per il penultimo passaggio abbiamo usato l'equazione dell'adiabatica nella forma: $TV^{\gamma-1} = \ cost$

---

3 - Un gas perfetto esegue il ciclo reversibile rappresentato in figura; il ciclo parte da una pressione ed un volume iniziali p_A e V_A ed è costituito da una trsformazione isobara, una isocora ed una adiabatica; dati p_A, V_A e V_C:
a) calcolare T_A , T_B , p_C e T_C;
b) calcolare il rendimento del ciclo;
c) dimostrare che tale rendimento è dato da: $1 - \frac{1}{\gamma}\frac{T_B - T_C}{T_B - T_A}$.

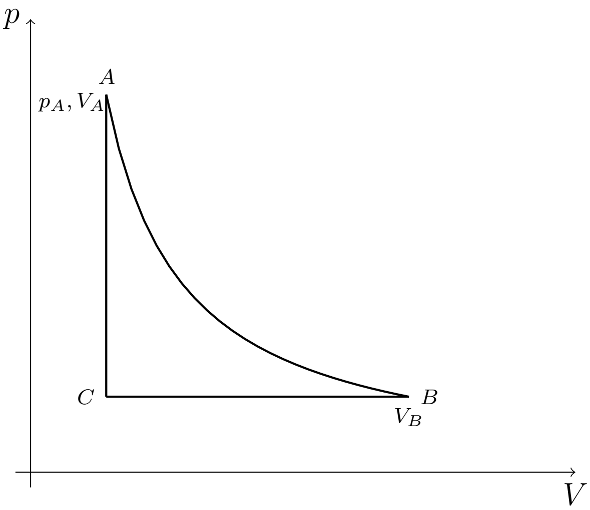


---

a) $T_{A,B} = \frac{p v_{A,B}}{nR}$ (eq.ne di stato) $p_C = p\left(\frac{v_A}{v_C}\right)^{\gamma}$; $T_C = T_A\left(\frac{v_A}{v_C}\right)^{\gamma-1}$ (eq.ne della trasf. adiabatica)
b-c) Numerando progressivamente le 3 fasi del ciclo, il lavoro compiuto ed il lavoro scambiato in tali fasi sono dati da:
$W_1 = p(V_C - V_A) > 0$; $Q_1 = nc_p(T_B - T_A) > 0$
$W_2 = 0$; $Q_2 = nc_v(T_C - T_B)$
$W_3 = -nc_v(T_A - T_C)$; $Q_3 = 0$
quindi $\eta = \frac{p(V_C - V_A) - nc_v(T_A - T_C)}{nc_p(T_B - T_A)} = \frac{nR(T_B - T_A) - nc_v(T_A - T_C)}{nc_p(T_B - T_A)}$
sostituendo $R = c_p - c_V$ si ottiene, con qualche passaggio algebrico, l'espressione proposta in c).

---

03 - n moli di gas perfetto eseguono il ciclo reversibile rappresentato in figura; il ciclo parte da una pressione ed un volume iniziali p_A e V_A ed è costituito da una trasformazione adiabatica AB , una isobara BC ed una isocora CA; dati p_A, V_A e V_B:
a) calcolare T_A , T_B , p_C e T_C;
b) dimostrare che $T_A > T_B$;
c) calcolare il rendimento del ciclo in funzione delle temperature.



---

a) $T_A = \frac{p_A V_A}{nR}$ (eq.ne di stato) $p_B = p_A\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma}$; $T_B = T_A\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1}$ (eq.ne della trasf. adiabatica reversibile)
$p_C = p_B$; $T_C = \frac{p_C V_A}{nR}$
b)Nell'ultima espressione $V_A < V_B$ e $\gamma - 1 > 0$.
c) Numerando progressivamente le 3 fasi del ciclo, le quantità di calore scambiate in tali fasi sono date da:
$Q_1 = 0$; $Q_2 = nc_p = nc_p(T_C - T_B) < 0$; $Q_3 = nc_V(T_A - T_C) > 0$
quindi $\eta = \frac{Q_2 + Q_3}{Q_3} = 1 + \frac{c_p}{c_V}\frac{T_C - T_B}{T_A - T_C}$

---

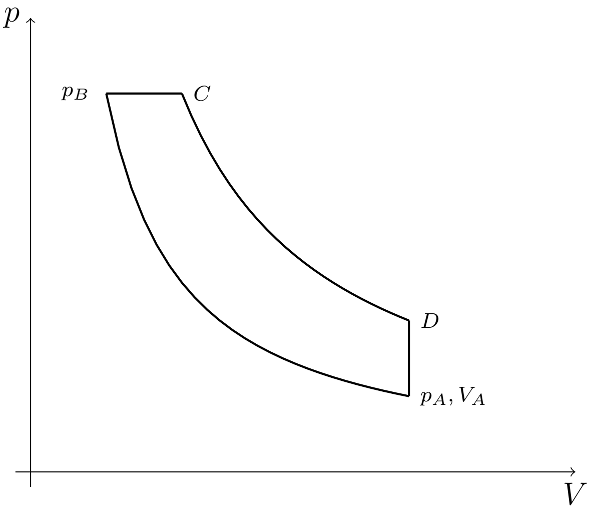
03 - n moli di gas perfetto monoatomico eseguono un ciclo reversibile a partire dallo stato P_A, V_A, T_A. Il ciclo è costituito da una espansione adiabatica fino allo stato B a pressione P_B seguita da una trasformazione a volume costante fino alla temperatura iniziale T_A; il gas ritorna infine allo stato iniziale stando a contatto con un termostato alla temperatura T_A.
a) Rappresentare il ciclo nel piano $p - V$;
b) calcolare, in funzione delle quantità date, il rendimento del ciclo.

$\eta = \frac{nc_v(T_A - T_B) + nRT_A \ln\frac{V_A}{V_B}}{nc_v(T_A - T_B)}$

a numeratore il lavoro netto compiuto nel ciclo : quello positivo compiuto nell'adiabatica e quello negativo nell'isoterma; a denominatore il calore ricevuto dal gas durante l'isocora.
Non basta: per scrivere η in funzione delle quantità date dobbiamo calcolare T_B e V_B utilizzando le equazioni della trasformazione adiabatica reversibile.

---

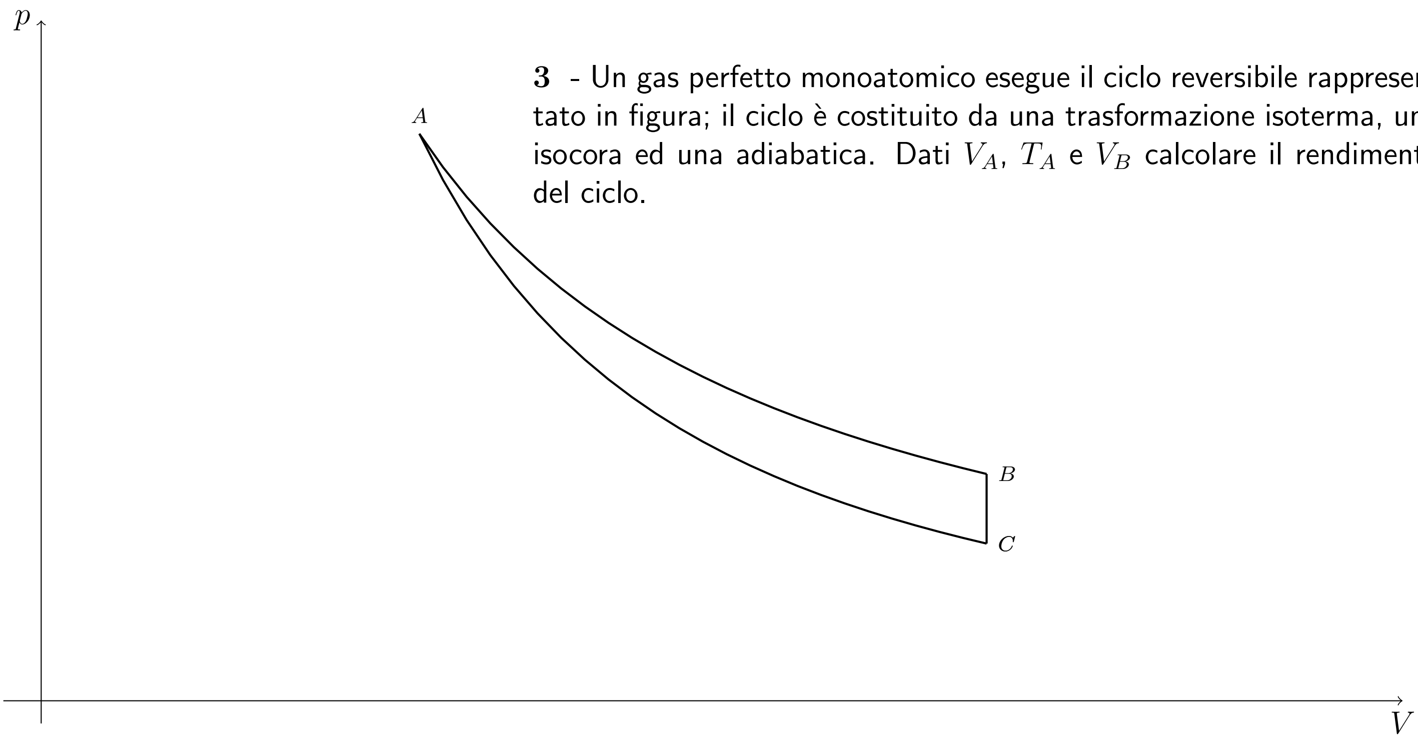
3 - Un gas perfetto esegue il ciclo reversibile rappresentato in figura; il ciclo parte da una pressione ed un volume iniziali p_A e V_A ed è costituito da una compressione adiabatica A-B fino alla pressione p_B, una espansione isobara B-C nella quale viene fornita al gas la quantità di calore Q_{BC}, una espansione adiabatica C-D che riporta il gas al volume V_A ed infine una trasformazione isocora che lo riporta nello stato iniziale.
a) Calcolare la temperatura negli stati A, B, C, D;
b) calcolare il rendimento del ciclo in funzione delle quantità sopra indicate.



In un ciclo la variazione di energia interna è nulla, quidi il lavoro compiuto è uguale al calore scambiato. In questo caso il calore scambiato è nullo per le adiabatiche, mentre il sistema riceve calore durante l'espansione isobara B-C e cede calore nella traformazione isocora D-A. Quindi il rendimento è dato da:
$\eta = \frac{Q_{BC}+Q_{DA}}{Q_{BC}}$
Q_{BC} è dato, non c'è bisogno di ricalcolaro, mentre:
$Q_{DA} = nc_V(T_A - T_D) < 0$
Dobbiamo dunque calcolare le temperature: in A mediante l'equazione di stato, in B mediante le equazioni della trasformazione adiabatica reversibile, in C utilizzando il calore scambiato dato e infine in D utilizzando le equazioni della trasformazione adiabatica.

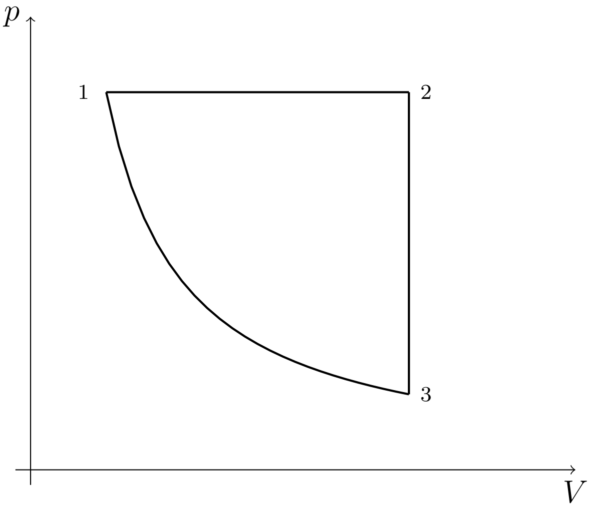
---

3 - Un gas perfetto monoatomico esegue il ciclo reversibile rappresentato in figura; il ciclo è costituito da una trasformazione isoterma, una isocora ed una adiabatica. Dati V_A, T_A e V_B calcolare il rendimento del ciclo.



CA è la trasformazione adiabatica : $\quad V_C = V_B \quad ; \quad T_C = T_A \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1}$
$Q_{CA} = 0 \quad ; \quad W_{CA} = -nc_V(T_A - T_C)$
AB è la isoterma : $\quad Q_{AB} = W_{AB} = nRT_A \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$
Per l'isocora : $\quad W_{BC} = 0 \quad ; \quad Q_{BC} < 0$
Quindi:
$\eta = \frac{W_{AB}+W_{CA}}{Q_{AB}} = 1 + \frac{W_{CA}}{Q_{AB}}$
Notiamo che il secondo termine è negativo e che la sostituzione delle espressioni calcolate in precedenza non conduce a semplificazioni significative.

3 - Un gas perfetto esegue il ciclo reversibile rappresentato in figura, costituito da una trasformazione isobara, una isocora ed una isoterma. Dati V_1, V_2 e T, temperatura dell'isoterma, calcolare il rendimento del ciclo.



Il rendimento è il rapporto tra il lavoro netto compiuto nel ciclo e il calore fornito al gas:
$\eta = \frac{p_1(V_2-V_1)+nRT\ln\frac{V_1}{V_2}}{nc_p(T_2-T)} = \frac{nR(T_2-T)+nRT\ln\frac{V_1}{V_2}}{nc_p(T_2-T)}$
per la seconda uguaglianza abbiamo applicato l'equazione di stato; per chiudere questa espressione dobbiamo calcolare T_2:
$T_2 = \frac{p_1V_2}{nR} = \frac{nRTV_2}{nRV_1} = T\frac{V_2}{V_1}$
Oppure: il rendimento è dato da (Q_1 è il calore ceduto dal gas (negativo) e Q_2 quello ricevuto (positivo)):
$\eta = 1 + \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{nc_V(T-T_2)+nRT\ln\frac{V_1}{V_2}}{nc_p(T_2-T)}$
Un po' di algebra, e la relazione di Mayer, per dimostrare l'uguaglianza delle due espressioni.